

# Minkowskische Zerlegungsgleichheit von Polytopen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades  
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)



vorgelegt dem Rat der  
Fakultät für Mathematik und Informatik  
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Math. Heiko Mund  
geboren am 19. September 1969 in Bleicherode

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>1. Definitionen und Bezeichnungen</b>	<b>6</b>
<b>2. Grundlegendes aus der Theorie konvexer Mengen</b>	<b>8</b>
2.1. Beschreibung konvexer Mengen . . . . .	8
2.2. Euklidische und sphärische Polytope . . . . .	11
2.3. Winkel und Winkelmaße von Polytopen . . . . .	15
2.3.1. Projektionskegel und innere Winkel . . . . .	15
2.3.2. Normalenkegel und äußere Winkel . . . . .	16
<b>3. Minkowskische Zerlegungsgleichheit von Polytopen</b>	<b>21</b>
3.1. Notwendige Bedingungen . . . . .	21
3.1.1. Die mittlere Breite eines konvexen Körpers . . . . .	21
3.1.2. Die Dehnschen Bedingungen . . . . .	23
3.1.3. Die Hadwigerschen Bedingungen . . . . .	26
3.1.4. Weitere notwendige Bedingungen in höheren Dimensionen . . . . .	28
3.2. Hinreichende Bedingungen . . . . .	50
3.2.1. Zerlegungen von Polytopen . . . . .	50
3.2.2. Kriterien für Summanden von Polytopen . . . . .	56
3.2.3. Abschwächungen der Zerlegungsgleichheit . . . . .	62
3.3. Klassifikation zerlegungsgleicher Polytope . . . . .	66
3.4. Typen zerlegungsgleicher Polygone . . . . .	73
3.4.1. Dreiecke . . . . .	73
3.4.2. Vierecke . . . . .	74
3.4.3. Fünfecke . . . . .	80
3.4.4. $n$ -Ecke . . . . .	99
<b>4. Zusammenfassung und offene Probleme</b>	<b>109</b>
4.1. Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	109
4.2. Einbettung in die allgemeine Zerlegungstheorie . . . . .	111
4.3. Aspekte der Zerlegungsgleichheit . . . . .	112
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>116</b>

# Einleitung

Die früheste Geometrie beschäftigte sich, wie uns die alte Ueberlieferung lehrt, mit der Messung und Vertheilung der Länderei, woher sie „Feldmessung“ genannt ward. Der Gedanke einer Messung nämlich ward den Aegyptern an die Hand gegeben durch die Ueberschwemmung des Nil. Denn viele Grundstücke, die vor der Flussschwelle offen dalagen, verschwanden beim Steigen des Flusses und kamen erst nach dem Sinken desselben wieder zum Vorschein, und es war nicht immer möglich, über die Identität derselben zu entscheiden. Dadurch kamen die Aegypter auf den Gedanken einer solchen Messung des vom Nil blosgelegten Landes;...

schreibt Heron von Alexandria in seiner Einleitung zur Geometrie (*Heronis Alexandr. geometric. et stereometr. reliquiae ed. Hultsch pag. 138 [Bre]*).

Die Bestimmung des Flächeninhalts geometrischer Figuren war demnach eine wichtige Aufgabe seit den Anfängen der Geometrie. Für Rechtecke ließ sich der Flächeninhalt recht einfach als Produkt der beiden Seitenlängen bestimmen. Ausgehend von einem intuitiven Begriff des Flächeninhalts hat man festgestellt, dass kongruente Figuren den selben Flächeninhalt besitzen. Zerschneidet man eine Figur in zwei oder mehr Teile, so ist der Flächeninhalt der Figur gleich der Summe der Flächeninhalte der einzelnen Teile. Diese beiden Eigenschaften kann man dazu ausnutzen, um den Inhalt anderer Figuren zu bestimmen.

Kann man eine Figur derart in einzelne Stücke zerlegen, dass man aus diesen Teilen eine andere Figur zusammensetzen kann, so spricht man von zueinander zerlegungsgleichen Figuren. Zwei zueinander zerlegungsgleiche Figuren müssen denselben Flächeninhalt aufweisen. Solche Flächenverwandlungen wurden von den alten Griechen ausführlich studiert. Beispielsweise hat Euklid in seinen Elementen [Euk, I,47] einen Beweis des Satzes des Pythagoras angegeben, der auf solchen Flächenverwandlungen beruht. Genauer hat er gezeigt, dass das Quadrat über der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zerlegungsgleich ist zu der Vereinigung der beiden Quadrate über den Katheten. [Mai, SS]

Die Frage, ob inhaltsgleiche Polygone auch stets zerlegungsgleich sind wurde erst 1832 von Wolfgang Bolyai positiv beantwortet. Ein Jahr später bewies P. Gerwien den gleichen Satz, den er auch auf sphärische Polygone übertrug.

Der Satz von Bolyai und Gerwien warf natürlich sofort die Frage auf, ob im Raum ein analoger Satz gilt. Der Versuch, einen entsprechenden Satz für den dreidimensionalen Raum zu beweisen führte jedoch zu Schwierigkeiten, die zu Zweifeln an der Richtigkeit der allgemeinen Aussage Anlass gaben. David Hilbert hat dies deshalb in seinem

berühmten Vortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahre 1900 als drittes seiner 23 Probleme aufgegriffen. Nur ein Jahr später gelang es seinem Schüler Max Dehn das Problem zu lösen, indem er bewies, dass ein Würfel und ein inhaltsgleiches reguläres Tetraeder nicht zerlegungsgleich sind.

Mit der Entwicklung der Mengenlehre setzte sich immer mehr die Auffassung durch, dass geometrische Figuren Punktmengen sind. Dies machte es erforderlich, den Begriff der geometrischen Figur genauer zu fassen. Insbesondere erwiesen sich die Randpunkte als problematisch. Zerschneidet man etwa eine Figur, so erhebt sich die Frage zu welchem der Teile die Schnittmenge gehört.

Zur Lösung dieses Problems bieten sich zwei verschiedene Wege an. Zum einen kann man fordern, dass alle Teile einer Zerlegung disjunkt voneinander sind. Dies führt zum Begriff der disjunkten Zerlegung bzw. der disjunkten Zerlegungsgleichheit. Es ist dabei jedoch erforderlich recht allgemeine Punktmengen als Teile zuzulassen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Forderung, dass die Teile disjunkt voneinander sind, dahingehend abzuschwächen, dass es genügt, dass das Innere der Teile jeweils disjunkt ist. Die Randpunkte bleiben also unberücksichtigt. Man spricht in diesem Fall von elementaren Zerlegungen bzw. von elementarer Zerlegungsgleichheit. Dieser Zerlegungsbegriff entspricht dem früher üblichen intuitiven Zugang.

Beide Zugänge erwiesen sich als sehr fruchtbar. Ich möchte hier nicht auf die Entwicklung der Zerlegungstheorie im 20. Jahrhundert im einzelnen eingehen. Allerdings möchte ich auf zwei Aspekte hinweisen, die dazu geführt haben, dass sich daraus ein weites Feld interessanter Fragestellungen entwickelt hat.

Zum einen kann man an die einzelnen Zerlegungsteile zusätzliche Bedingungen stellen. Für die elementare Zerlegungsgleichheit ist dies sogar notwendig, um nichttriviale Ergebnisse zu erzielen (vgl. [HR, Prop. 5]). Damit hängt auch eng zusammen, auf welche Teilmengen des euklidischen Raumes man sich bei der Untersuchung der Zerlegungsgleichheit beschränkt. Meist betrachtet man dabei dasselbe System von Teilmengen. Eine andere Möglichkeit der Abwandlung der klassischen Fragestellung besteht darin, die Gruppe der euklidischen Bewegungen durch eine andere Transformationsgruppe zu ersetzen. Der Begriff der Zerlegungsgleichheit beinhaltet also drei verschiedene Aspekte:

- die Art der Zerlegung (elementar, disjunkt),
- die betrachtete Transformationsgruppe und
- welche Mengen als Zerlegungsteile zugelassen sind.

Zu den verschiedenen Fragestellungen die sich daraus ergeben gab es in den letzten Jahrzehnten vielfältige Untersuchungen. Dabei standen einerseits, wie etwa in den Arbeiten von Hadwiger [Ha2], weiterhin Polygone und Polyeder im Mittelpunkt des Interesses. Andererseits hat man die Untersuchungen auch auf konvexe und noch allgemeinere Mengen ausgedehnt. Hier sei nur auf das von A. Tarski [Tar] aufgeworfene Problem der Quadratur des Kreises (im zerlegungstheoretischen Sinne) und die überraschende Lösung von M. Laczkovich [Lac] verwiesen.

Bei den verschiedenen Ansätzen zeigt sich immer wieder die enge Beziehung zwischen der Zerlegungsgleichheitsrelation und verschiedenen Inhalts- und Maßbegriffen, wie es schon im Satz von Bolyai-Gerwien zum Ausdruck kommt. Um die Gemeinsamkeiten der verschiedenen Zerlegungstheorien von einem abstrakten algebraischen Standpunkt aus herauszustellen, wurde von E. Hertel der Begriff der Zerlegungsstruktur eingeführt [He1, He2]. Es zeigt sich dabei ein enger Zusammenhang zwischen der Zerlegungsgleichheit und gewissen Homomorphismen von Zerlegungsstrukturen in abelsche Gruppen bzw. Halbgruppen [Ja1, Ja3].

Eine andere in der Geometrie verwendete Mengenoperation ist die Minkowskisumme. In Analogie zur klassischen Zerlegungstheorie kann man damit Minkowskische Zerlegungen und Minkowskische Zerlegungsgleichheit definieren (Definition 1.2 bzw. 3.1). Zwar gibt es bereits einige Arbeiten, die sich mit Minkowskischen Zerlegungen befassen (vgl. [Sch]), jedoch war die Minkowskische Zerlegungsgleichheit meines Wissens noch nicht Gegenstand von Untersuchungen.

Deshalb möchte ich mich in dieser Arbeit mit der Minkowskischen Zerlegungsgleichheit beschäftigen. Um das Untersuchungsgebiet etwas einzuschränken, möchte ich mich dabei auf die Zerlegungsgleichheit von Polytopen beschränken. Insbesondere werde ich auf die Zerlegungsgleichheit von Polygonen genauer eingehen, da sich die Situation im zweidimensionalen Fall um einiges einfacher darstellt als in höheren Dimensionen. Außerdem möchte ich mich auf die Gruppe der euklidischen Bewegungen konzentrieren. Von der Vielzahl möglicher Fragestellungen wird dementsprechend nur ein kleiner Teil behandelt. Im 4. Kapitel wird dann ein kleiner Ausblick gegeben, in welche Richtungen die weiteren Forschungen auf dem Gebiet gehen können.

Doch zunächst erst einmal ein kurzer Überblick über die Arbeit. Das 1. Kapitel dient der Einführung der verwendeten Begriffe und Bezeichnungen. Im 2. Kapitel werden zunächst erst einmal grundlegende Definitionen und Sätze aus der Theorie der konvexen Mengen zur Verfügung gestellt, soweit sie in dieser Arbeit benötigt werden. Es werden euklidische und sphärische Polytope definiert und verschiedene Winkelbegriffe eingeführt.

Das 3. Kapitel stellt den Hauptteil der Arbeit dar. Dabei werden zunächst im Abschnitt 3.1 notwendige Bedingungen für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit untersucht. Da für zwei zerlegungsgleiche Polytope bzw. konvexe Körper die Werte für jedes bewegungsinvariante Minkowski-additive Funktional übereinstimmen müssen, ist dieser Abschnitt der Untersuchung solcher Funktionele gewidmet. Die mittlere Breite ist sicher das bekannteste dieser Funktionele. Sie ist für alle konvexen Körper definiert.

Speziell für Polytope gibt es noch weitere derartige Funktionele. Ein Beispiel dafür sind die Dehnschen Funktionele, die im Abschnitt 3.1.2 genauer untersucht werden. H. Hadwiger hat in [Ha2, S. 49f] eine Verallgemeinerung der Dehnschen Funktionele angegeben. Im Abschnitt 3.1.3 zeigt sich, dass einige dieser Hadwigerschen Funktionele auch Minkowski-additiv sind. Aus den Dehnschen bzw. Hadwigerschen Funktionalen wurde dann im Abschnitt 3.1.4 ein allgemeines Konstruktionsprinzip abgeleitet, um aus schon bekannten Minkowski-additiven Funktionalen weitere zu gewinnen. Mit Hilfe eines anderen Konstruktionsverfahrens konnten eine ganze Reihe weiterer bewegungs-

invarianter Minkowski-additiver Funktionale gefunden werden, die gerade in höheren Dimensionen weitere notwendige Bedingungen liefern.

Im Abschnitt 3.2 werden wir uns dann den hinreichende Bedingungen für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit zuwenden. Dabei untersuchen wir im Abschnitt 3.2.1 zunächst, welche Zerlegungen von Polytopen überhaupt möglich sind. Als Hilfsmittel für die weiteren Untersuchungen werden dann im Abschnitt 3.2.2 Kriterien untersucht, wann ein konvexer Körper bzw. ein Polytop ein Summand eines anderen ist.

Eine der wichtigen Eigenschaften der Minkowskischen Zerlegungsgleichheit ist die fehlende Transitivität. Dies hat zur Folge, dass die im Abschnitt 3.1 betrachteten notwendigen Bedingungen nicht hinreichend sein können. Um trotzdem hinreichende Bedingungen zu finden, werden im Abschnitt 3.2.3 verschiedene Verallgemeinerungen der Zerlegungsgleichheit betrachtet. Dabei werden die in der klassischen Zerlegungstheorie verwendeten Abschwächungen der Zerlegungsgleichheit auf den Minkowskischen Fall übertragen.

In dem folgenden Abschnitt 3.3 werden wir einen ganz anderen Weg beschreiten, um notwendige und hinreichende Bedingungen für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit zu finden. Dabei werden wir die Menge aller Polytope in Zerlegungsklassen einteilen. Die fehlende Transitivität der Minkowski-Zerlegungsgleichheit hat dabei zur Folge, dass die einzelnen Zerlegungsklassen nicht disjunkt sind. Mit Hilfe dieser Zerlegungsklassen wollen wir ein der klassischen Zerlegungstheorie entsprechendes formales Hauptkriterium entwickeln.

Schließlich werden im Abschnitt 3.4 die Zerlegungstypen von Polygonen genauer untersucht. Insbesondere wird untersucht, für welche  $n$ -Ecke die Zerlegung in unzerlegbare Polygone eindeutig ist. Diese liegen dann auch nur in einer Zerlegungsklasse. Für Drei- und Vierecke ist diese Zerlegung in unzerlegbare Polygone stets eindeutig. Deshalb kann man Drei- und Vierecke nach den Zerlegungstypen klassifizieren.

Im 4. Kapitel werden schließlich noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst und einige noch offene Probleme angeschnitten. Außerdem soll noch ein Ausblick gegeben werden, um weitere Forschungen auf diesem spannenden Gebiet anzustoßen.

An dieser Stelle möchte ich allen Personen danken, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben. Besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. E. Hertel, der mir stets mit guten Ratschlägen zur Seite stand.

# 1. Definitionen und Bezeichnungen

Mit  $\mathbb{E}^d$  sei der  $d$ -dimensionale euklidische Raum bezeichnet.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sei das Standardskalarprodukt und  $\|\cdot\|$  die dazu gehörige Norm. Für den Ursprung wird das Symbol  $o$  verwendet. Die Elemente von  $\mathbb{E}^d$  werden einerseits als Punkte bezeichnet, um den geometrischen Charakter der Untersuchungen zu betonen. Andererseits verwenden wir auch den Begriff Vektor, wenn algebraische Operationen angewendet werden. Für zwei verschiedene Punkte  $a, b \in \mathbb{E}^d$  bezeichne  $\overline{ab} := \{x \in \mathbb{E}^d : x = \lambda a + (1-\lambda)b \wedge 0 \leq \lambda \leq 1\}$  die Strecke mit den Endpunkten  $a$  und  $b$ . Mit  $\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{E}^d : \|x\| = 1\}$  wird die Einheitssphäre des  $d$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbb{E}^d$  bezeichnet.

Neben den üblichen mengentheoretischen Bezeichnungen werden hier folgende weitere Symbole verwendet:

**Bezeichnungen:** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{E}^d$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $t \in \mathbb{E}^d$ . Dann bezeichne

$A \oplus B$	$:= \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$ die Minkowskisumme von $A$ und $B$ ,
$A + t$	$:= A \oplus \{t\}$ die Translation der Menge $A$ um $t$ ,
$-A$	$:= \{-a : a \in A\}$ das Bild der Punktspiegelung von $A$ am Ursprung,
$\lambda \cdot A$	$:= \{\lambda x : x \in A\}$ das Dilatatat der Menge $A$ mit dem Faktor $\lambda$ ,
$A \cup B$	die disjunkte Vereinigung von $A$ und $B$ , $C = A \cup B \iff C = A \cup B \wedge A \cap B = \emptyset$
$A \uplus B$	die elementargeometrische Summe von $A$ und $B$ , $C = A \uplus B \iff C = A \cup B \wedge \text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \emptyset$
$\text{int } A$	das Innere der Menge $A$ ,
$\text{cl } A$	die abgeschlossene Hülle von $A$ und
$\text{aff } A$	die affine Hülle von $A$ .

Der Multiplikationspunkt kann bei der Dilatation auch weggelassen werden. Mit  $V_k(K)$  bezeichnen wir das  $k$ -dimensionale Volumen einer konvexen Menge  $K$ . Für das  $k$ -dimensionale Hausdorffmaß auf der Einheitssphäre verwenden wir das Symbol  $\sigma_k$ .  $\kappa_d$  und  $\omega_d$  stehen für das Volumen bzw. die Oberfläche der  $d$ -dimensionalen Einheitskugel. Die Potenzmenge einer Menge  $M$  bezeichnen wir mit  $2^M$ . Für eine reelle Zahl

$\lambda \in \mathbb{R}$  steht das Symbol  $\lceil \lambda \rceil$  für die kleinste ganze Zahl, welche größer oder gleich  $\lambda$  ist.  $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.

Die Transformationsgruppen des  $\mathbb{E}^d$  werden mit kalligraphische Buchstaben bezeichnet. So verwenden wir das Symbol  $\mathcal{T}$  für die Gruppe der Translationen,  $\mathcal{B}$  für die euklidischen Bewegungen und  $\mathcal{H}$  für die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen. Gelegentlich wird zur genaueren Bezeichnung die Dimension des Raumes als unterer Index an die Transformationsgruppe angehängt.

Für Familien von Teilmengen des  $\mathbb{E}^d$  verwenden wir Frakturbuchstaben. Mit  $\mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  bezeichnen wir beispielsweise die Menge der nichtleeren kompakten konvexen Teilmengen des  $\mathbb{E}^d$  (siehe Definition 2.1 auf Seite 8) und mit  $\mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  die Menge der nichtleeren Polytope des  $\mathbb{E}^d$  (siehe Definition 2.4 auf Seite 11).

**Definition 1.1:** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{E}^d$  und  $\mathcal{G}$  eine Gruppe von Transformationen des  $\mathbb{E}^d$ . Dann heißen  $A$  und  $B$  *äquivalent bzgl.  $\mathcal{G}$*  bzw.  *$\mathcal{G}$ -gleich*

$$A \stackrel{\mathcal{G}}{=} B : \Longleftrightarrow \bigvee_{\gamma \in \mathcal{G}} (\gamma(A) = B).$$

Ist speziell  $\mathcal{G} = \mathcal{B}_d$  die Gruppe der euklidischen Bewegungen, so verwenden wir das Symbol  $A \cong B$ .  $A$  und  $B$  heißen dann zueinander *kongruente Punktmengen*. Ist  $\mathcal{G} = \mathcal{H}_d$  die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen, so bezeichnen wir die *Ähnlichkeit* zweier Mengen  $A, B \subseteq \mathbb{E}^d$  mit dem Symbol  $A \simeq B$ .

Wir wollen nun den Begriff der Zerlegungsgleichheit einführen. Die Definition ist dabei sehr allgemein gehalten. In Definition 3.1 auf Seite 21 wird diese Definition für die Minkowskische Zerlegungsgleichheit bzgl. der euklidischen Bewegungen präzisiert und ein besonderes Symbol dafür eingeführt.

**Definition 1.2:** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{E}^d$  und  $\mathcal{G}$  eine Gruppe von Transformationen des  $\mathbb{E}^d$ . Dann heißen  $A$  und  $B$  *zerlegungsgleich bzgl.  $\mathcal{G}$  unter Verwendung von Teilen des Typs  $\mathfrak{T}$  ( $\mathfrak{T} \subseteq 2^{\mathbb{E}^d}$ )* :  $\Longleftrightarrow$

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \wedge B = \sum_{i=1}^n B_i \wedge A_i, B_i \in \mathfrak{T} \wedge A_i \stackrel{\mathcal{G}}{=} B_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Dabei kann das Summenzeichen für verschiedene (partielle) Operationen von Teilmengen des  $\mathbb{E}^d$  stehen. Das kann zum Beispiel die disjunkte Vereinigung oder die elementargeometrische Summe sein. Dann sprechen wir von disjunkter bzw. elementarer Zerlegungsgleichheit. In dieser Arbeit wird speziell die Minkowskische Zerlegungsgleichheit betrachtet, wobei als Operation die Minkowskisumme verwendet wird.



## 2. Grundlegendes aus der Theorie konvexer Mengen

### 2.1. Beschreibung konvexer Mengen

In diesem Abschnitt werden einige Definitionen, Bezeichnungen und Sätze aus der Theorie der konvexen Mengen zur Verfügung gestellt, soweit sie in dieser Arbeit benötigt werden. Dabei werde ich mich hauptsächlich auf die Bücher von K. Leichtweiß [Lei] und R. Schneider [Sch] stützen. Zunächst wollen wir die Begriffe konvexer Körper und konvexe Hülle definieren.

**Definition 2.1:** (a) Eine Punktmenge  $K \subseteq \mathbb{E}^d$  heißt *konvex*, falls zu je zwei Punkten  $a, b \in K$  auch die Verbindungsstrecke  $\overline{ab}$  in  $K$  liegt. Die Familie aller konvexen Mengen wird mit  $\tilde{\mathfrak{K}}(\mathbb{E}^d)$  bezeichnet.

(b) Eine nichtleere kompakte konvexe Menge des  $\mathbb{E}^d$  heißt *konvexer Körper*. Die Familie der konvexen Körper des  $\mathbb{E}^d$  wird mit  $\mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  bezeichnet.

(c) Die *konvexe Hülle* einer Punktmenge  $A \subseteq \mathbb{E}^d$  ist definiert als

$$\text{conv } A := \bigcap_{\substack{K \in \tilde{\mathfrak{K}}(\mathbb{E}^d) \\ A \subseteq K}} K.$$

Um für Punktmenge des  $\mathbb{E}^d$  einen Dimensionsbegriff einzuführen gibt es in der Literatur verschiedene Ansätze, die auch zu unterschiedlichen Werten der Dimension bestimmter Mengen führen. Glücklicherweise stimmen die Werte der üblichen Dimensionsfunktionen für konvexe Mengen überein. Deshalb wählen wir hier einen möglichst einfachen Zugang. Dabei setzen wir den üblichen Dimensionsbegriff für affine Unterräume voraus.

**Definition 2.2:** Die *Dimension* einer konvexen Menge  $K \in \tilde{\mathfrak{K}}(\mathbb{E}^d)$  wird definiert durch

$$\dim K := \dim(\text{aff } K).$$

Es sollen nun einige Hilfsmittel zur Beschreibung konvexer Mengen bereitgestellt werden.

**Definition 2.3: (Beschreibung konvexer Körper)**

Sei  $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  ein konvexe Körper.

(a) *Stützfunktion* von  $K$ :  $h_K : \mathbb{E}^d \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h_K(u) := \sup\{\langle x, u \rangle : x \in K\},$$

(b) *Stützhyperebene* von  $K$  in Richtung  $u$ :

$$H_K(u) := \{x \in \mathbb{E}^d : \langle x, u \rangle = h_K(u)\},$$

(c) *Stützhalbraum* von  $K$  in Richtung  $u$ :

$$H_K^-(u) := \{x \in \mathbb{E}^d : \langle x, u \rangle \leq h_K(u)\},$$

(d) *Stützmeng*e bzw. *Seite* von  $K$  in Richtung  $u$ :

$$F_K(u) := H_K(u) \cap K.$$

Daraus lassen sich gleich einige Eigenschaften herleiten, deren Beweis recht einfach ist.

**Lemma 2.1: (Eigenschaften der Stützfunktion)**

Für  $K, L \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$ ,  $t, u, v \in \mathbb{E}^d$ ,  $u, v \neq o$  und  $\lambda \geq 0$  gilt:

$$(i) \quad h_{K+t}(u) = h_K(u) + \langle t, u \rangle,$$

$$(ii) \quad h_K(\lambda u) = \lambda h_K(u),$$

$$(iii) \quad h_K(u + v) \leq h_K(u) + h_K(v),$$

$$(iv) \quad h_K \leq h_L \quad \Longleftrightarrow \quad K \subseteq L,$$

$$(v) \quad h_K = h_L \quad \Longleftrightarrow \quad K = L,$$

$$(vi) \quad h_{\lambda K}(u) = \lambda h_K(u),$$

$$(vii) \quad h_{-K}(u) = h_K(-u).$$

**Lemma 2.2:** [Sch, Theorem 1.7.5] Für  $K, L \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  und  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$  gilt:

$$(i) \quad h_{K \oplus L}(u) = h_K(u) + h_L(u),$$

$$(ii) \quad H_{K \oplus L}(u) = H_K(u) \oplus H_L(u),$$

$$(iii) \quad F_{K \oplus L}(u) = F_K(u) \oplus F_L(u).$$

BEWEIS: (i) Sei  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$ . Dann existiert ein  $x \in P$  mit  $h_P(u) = \langle x, u \rangle$  und ein  $y \in Q$  mit  $h_Q(u) = \langle y, u \rangle$ . Damit gilt  $h_P(u) + h_Q(u) = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle = \langle x + y, u \rangle$ . Da  $x + y \in P \oplus Q$  ist, gilt  $\langle x + y, u \rangle \leq h_{P \oplus Q}(u)$  und damit  $h_P(u) + h_Q(u) \leq h_{P \oplus Q}(u)$ . Sei jetzt  $z \in P \oplus Q$ . Dann hat  $z$  die Darstellung  $z = x + y$  mit geeigneten  $x \in P$  und  $y \in Q$  und es gilt  $\langle z, u \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle \leq h_P(u) + h_Q(u)$ . Da  $z$  beliebig war, ist  $h_{P \oplus Q}(u) \leq h_P(u) + h_Q(u)$ . Somit haben wir  $h_{P \oplus Q}(u) = h_P(u) + h_Q(u)$ .

(ii) Seien  $x \in H_P(u)$  und  $y \in H_Q(u)$  für ein festes  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$ . Dann ist  $\langle x, u \rangle = h_P(u)$  und  $\langle y, u \rangle = h_Q(u)$ . Damit ergibt sich  $\langle x + y, u \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle = h_P(u) + h_Q(u) = h_{P \oplus Q}(u)$ . Infolge dessen ist  $x + y \in H_{P \oplus Q}(u)$  und es gilt  $H_P(u) \oplus H_Q(u) \subseteq H_{P \oplus Q}(u)$ . Sei jetzt  $z \in H_{P \oplus Q}(u)$  und  $x \in H_P(u)$ . Dann definieren wir  $y := z - x$ . Damit gilt  $\langle y, u \rangle = \langle z - x, u \rangle = \langle z, u \rangle - \langle x, u \rangle = h_{P \oplus Q}(u) - h_P(u)$ . Mit Teil (i) gilt  $\langle y, u \rangle = h_Q(u)$ . Somit ist  $y \in H_Q(u)$  und es gilt  $H_{P \oplus Q}(u) \subseteq H_P(u) \oplus H_Q(u)$ . Insgesamt haben wir  $H_{P \oplus Q}(u) = H_P(u) \oplus H_Q(u)$ .

- (iii) Seien  $x \in F_P(u)$  und  $y \in F_Q(u)$  für ein festes  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$ . Da jeweils  $x \in P$  und  $y \in Q$  gilt, ist auch  $x + y \in P \oplus Q$ . Andererseits gilt auch  $x \in H_P(u)$  und  $y \in H_Q(u)$ . Mit Teil (ii) ist dann auch  $x + y \in H_{P \oplus Q}(u)$ . Somit ist  $x + y \in F_{P \oplus Q}(u)$ . Sei jetzt  $z \in F_{P \oplus Q}(u)$ . Dann gilt  $\langle z, u \rangle = h_{P \oplus Q}(u)$  und  $z \in P \oplus Q$ . Damit existiert ein  $x \in P$  und ein  $y \in Q$ , sodass  $z = x + y$ . Weiter gilt unter Verwendung von Teil (i)  $h_P(u) + h_Q(u) = h_{P \oplus Q}(u) = \langle z, u \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle$ . Da  $x \in P$  und  $y \in Q$ , gilt auch  $\langle x, u \rangle \leq h_P(u)$  und  $\langle y, u \rangle \leq h_Q(u)$ . Zusammen mit der obigen Beziehung ergibt sich dann  $\langle x, u \rangle = h_P(u)$  und  $\langle y, u \rangle = h_Q(u)$ . Entsprechend gilt  $x \in H_P(u)$  und  $y \in H_Q(u)$  und somit auch  $x \in F_P(u)$  und  $y \in F_Q(u)$ . q.e.d.

**Folgerung 2.1:** Für  $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$ ,  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$  und  $\lambda > 0$  gilt:

$$(i) \quad H_K(u) = H_K(\lambda u),$$

$$(ii) \quad F_K(u) = F_K(\lambda u).$$

BEWEIS: Mit der Eigenschaft (ii) aus Lemma 2.1 erhält man

$$(i) \quad H_K(u) = \{x \in \mathbb{E}^d : \langle x, u \rangle = h_K(u)\} = \{x \in \mathbb{E}^d : \lambda \langle x, u \rangle = \lambda h_K(u)\} = \{x \in \mathbb{E}^d : \langle x, \lambda u \rangle = h_K(\lambda u)\} = H_K(\lambda u) \text{ und}$$

$$(ii) \quad F_K(u) = \{x \in K : \langle x, u \rangle = h_K(u)\} = \{x \in K : \lambda \langle x, u \rangle = \lambda h_K(u)\} = \{x \in K : \langle x, \lambda u \rangle = h_K(\lambda u)\} = F_K(\lambda u). \quad \text{q.e.d.}$$

**Folgerung 2.2:** Es gilt folgende Kürzungsregel:

$$\bigwedge_{K, L, M \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)} \left( K \oplus M = L \oplus M \implies K = L \right) \quad (\text{KZR})$$

BEWEIS: Seien  $K, L$  und  $M$  konvexe Mengen des  $\mathbb{E}^d$  mit  $K \oplus M = L \oplus M$ . Dann gilt natürlich auch für die Stützfunktionen  $h_{K \oplus M} = h_{L \oplus M}$ . Mit Lemma 2.2(i) erhält man  $h_K + h_M = h_{K \oplus M} = h_{L \oplus M} = h_L + h_M$ . Damit ergibt sich  $h_K = h_L$ . Da nach Lemma 2.1(v) jede konvexe Menge eindeutig durch ihre Stützfunktion bestimmt ist, gilt also  $K = L$ . q.e.d.

Diese Kürzungsregel überträgt sich auch auf die Translationsgleichheit.

**Folgerung 2.3:**

$$\bigwedge_{K, L, M \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)} \left( K \oplus M \stackrel{\mathcal{T}}{=} L \oplus M \implies K \stackrel{\mathcal{T}}{=} L \right) \quad (\text{KZR}_{\stackrel{\mathcal{T}}{=}})$$

BEWEIS: Seien  $K, L$  und  $M$  konvexe Mengen des  $\mathbb{E}^d$  mit  $K \oplus M \stackrel{\mathcal{T}}{=} L \oplus M$ . Dann gibt es einen Translationsvektor  $t \in \mathbb{E}^d$ , sodass  $K \oplus M = L \oplus M + t$ . Damit erhalten wir  $K \oplus M = L \oplus M + t = (L + t) \oplus M$ . Mit der Kürzungsregel (KZR) ergibt sich  $K = L + t$ . Also sind  $K$  und  $L$  translationsgleich. q.e.d.

Für die Dimension der Minkowskisumme konvexer Mengen erhalten wir folgende einfache Abschätzung:

**Lemma 2.3:** Für konvexe Mengen  $K, L \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  gilt:

$$\dim(K \oplus L) \geq \max(\dim(K), \dim(L)).$$

BEWEIS: Es gilt offenbar  $K + t \subseteq K \oplus L$  für ein  $t \in L$ . Aus der Monotonie und Bewegungsinvarianz der Dimension folgt  $\dim K \leq \dim(K \oplus L)$ . Entsprechend erhalten wir auch  $\dim L \leq \dim(K \oplus L)$  und somit  $\dim(K \oplus L) \geq \max(\dim(K), \dim(L))$ . q.e.d.

Später benötigen wir noch eine Aussage zum Verhalten der Minkowskischen Addition unter bestimmten Orthogonalprojektionen. Es gilt jedoch allgemein, dass konvexe Mengen unter linearen Abbildungen Minkowski-additiv sind.

**Lemma 2.4:** Es sei  $\varphi : \mathbb{E}^d \rightarrow \mathbb{E}^d$  eine lineare Abbildung. Dann gilt für  $K, L \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$ :

$$\varphi(K \oplus L) = \varphi(K) \oplus \varphi(L).$$

BEWEIS: Es seien  $K$  und  $L$  konvexe Mengen des  $\mathbb{E}^d$  und  $y \in \varphi(K \oplus L)$ . Dann gibt es ein  $x \in K \oplus L$ , sodass  $\varphi(x) = y$  ist. Da  $x \in K \oplus L$  ist, gibt es ebenfalls ein  $r \in K$  und ein  $s \in L$ , sodass  $x = r + s$  ist. Demnach gilt  $y = \varphi(x) = \varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s) \in \varphi(K) \oplus \varphi(L)$ . Somit ist  $\varphi(K \oplus L) \subseteq \varphi(K) \oplus \varphi(L)$ .

Umgekehrt sei jetzt  $w \in \varphi(K) \oplus \varphi(L)$ . Dann gibt es ein  $y \in \varphi(K)$  und ein  $z \in \varphi(L)$ , sodass  $w = y + z$ . Folglich gibt es weiterhin ein  $r \in K$  mit  $\varphi(r) = y$  und ein  $s \in L$  mit  $\varphi(s) = z$ . Damit erhalten wir  $w = \varphi(r) + \varphi(s) = \varphi(r + s) \in \varphi(K \oplus L)$ . Somit ist auch  $\varphi(K) \oplus \varphi(L) \subseteq \varphi(K \oplus L)$ . q.e.d.

## 2.2. Euklidische und sphärische Polytope

**Definition 2.4:** (a) Eine Punktmenge  $P \subseteq \mathbb{E}^d$  heißt *Polytop* oder *konvexes Polyeder*, falls es die konvexe Hülle einer endlichen Menge  $M \subseteq \mathbb{E}^d$  ist. Die Menge aller nichtleeren Polytope des  $\mathbb{E}^d$  wird mit  $\mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  bezeichnet.

(b) Ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  heißt *eigentlich*, wenn  $\dim P = d$  ist. Die Familie der eigentlichen Polytope des  $\mathbb{E}^d$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{P}_d(\mathbb{E}^d)$  (oder kurz  $\mathfrak{P}_d$ ).

(c)  $F$  heißt *k-dimensionale Seite* oder kurz *k-Seite* von  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , wenn es eine Stützhyperebene  $H$  an  $P$  gibt, sodass  $F = H \cap P$  und  $\dim F = k$  gilt. Die Menge aller *k-dimensionale Seiten* von  $P$  wird mit  $\mathfrak{F}_k(P)$  bezeichnet. Die nulldimensionalen Seiten heißen *Ecken*. Die Menge aller Eckpunkte von  $P$  wird auch mit  $\text{vert}(P)$  bezeichnet. Die eindimensionalen Seiten heißen *Kanten*. Für  $k = d - 2$  heißt  $F$  auch *Hyperkante* und für  $k = d - 1$  (*Hyper-*)*Seitenfläche*. Dazu zählen wir noch die beiden uneigentlichen Seiten  $\emptyset$  und  $P$ . Der leeren Menge wird dabei die Dimension  $\dim \emptyset = -1$  zugeordnet. Es gilt dann für jedes eigentliche Polytop  $P$ :  $\mathfrak{F}_{-1}(P) := \{\emptyset\}$  und  $\mathfrak{F}_d(P) := \{P\}$ . Ist  $P$  uneigentlich, so ist  $\mathfrak{F}_d(P) := \emptyset$ . Für die Menge aller Seiten von  $P$  verwenden wir das Symbol  $\mathfrak{F}(P) := \bigcup_{k=-1}^d \mathfrak{F}_k(P)$ . Die Menge aller eigentlichen Seiten von  $P$  bezeichnen wir schließlich mit  $\mathfrak{F}_*(P) := \bigcup_{k=0}^{d-1} \mathfrak{F}_k(P)$ .

(d) Es seien  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}(P)$  zwei Seiten eines Polytops  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ . Dann heißt

$$F := \langle F_1 \cup F_2 \rangle := \bigcap_{\substack{G \in \mathfrak{F}(P) \\ F_1 \cup F_2 \subseteq G}} G.$$

die von  $F_1$  und  $F_2$  erzeugte Seite.

**Bemerkung 2.1:** (i) Mit  $\mathfrak{F}_0(P)$  werden die Ecken von  $P$  bezeichnet. Als nulldimensionale Seiten sind die Ecken eigentlich einpunktige Mengen. Es gilt also  $\mathfrak{F}_0(P) \subseteq 2^{\mathbb{E}^d}$ . Mit  $\text{vert}(P)$  wird hingegen die Menge der Eckpunkte bezeichnet, es gilt also  $\mathfrak{F}_0(P) = \{\{a\} : a \in \text{vert}(P)\}$ . Allerdings werden wir diese Unterscheidung nicht streng beibehalten. So schreiben wir sowohl  $A \in \text{vert}(P)$ , als auch  $A \in \mathfrak{F}_0(P)$  und  $A$  bezeichnet dabei sowohl den Eckpunkt selbst, als auch die aus dem Eckpunkt bestehende einpunktige Menge. Aus dem Zusammenhang ist dann jeweils ersichtlich, was gemeint ist.

(ii)  $\mathfrak{F}(P)$  bildet mit den beiden Operationen  $\cap$  und  $\langle \cdot \cup \cdot \rangle$  einen Verband.

Sphärische Polytope sind zwar nicht Gegenstand dieser Untersuchungen, werden allerdings später zur Beschreibung euklidischer Polytope benötigt. Die Definition sphärischer Polytope bereitet dabei einige Schwierigkeiten, da auf der Sphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$  keine lineare Struktur zur Verfügung steht. Außerdem bereitet die Existenz diametral gegenüberliegender Punkte einige Probleme. In der Literatur gibt es deshalb verschiedene Ansätze, die zu wesentlich verschiedenen Definitionen führen (vgl. etwa [BH]). Der hier gewählte Zugang ist speziell an die Erfordernisse dieser Arbeit angepasst, bietet aber auch allgemein einige Vorteile. Zunächst werden die Begriffe der sphärischen Strecke und der sphärisch-konvexen Menge eingeführt.

**Definition 2.5:** (a) Für zwei verschiedene Punkte  $a, b \in \mathbb{S}^{d-1}$ , die nicht diametral zueinander liegen, heißt

$$\widehat{ab} := \text{cone}(o, \overline{ab}) \cap \mathbb{S}^{d-1}$$

*sphärische Strecke* oder *Bogen* zwischen  $a$  und  $b$ .

Dabei ist  $\text{cone}(o, \overline{ab}) := \{\lambda x \in \mathbb{E}^d : x \in \overline{ab}, \lambda \geq 0\}$  der Projektionskegel von  $\overline{ab}$  mit dem Ursprung als Scheitelpunkt (vgl. Definition 2.12 auf Seite 16).

- (b) Eine Punktmenge  $K \subseteq \mathbb{S}^{d-1}$  heißt *sphärisch-konvex*, falls zu je zwei nicht diametral liegenden Punkten  $a, b \in K$  auch der Bogen  $\widehat{ab}$  zu  $K$  gehört. Die Familie aller sphärisch-konvexen Mengen wird mit  $\tilde{\mathfrak{K}}(\mathbb{S}^{d-1})$  bezeichnet.
- (c) Eine nichtleere kompakte sphärisch-konvexe Menge des  $\mathbb{S}^{d-1}$  heißt *sphärisch-konvexer Körper*. Die Familie der konvexen Körper der Sphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$  wird mit  $\mathfrak{K}(\mathbb{S}^{d-1})$  bezeichnet.

(d) Die *sphärisch-konvexe Hülle* einer Punktmenge  $A \subseteq \mathbb{S}^{d-1}$  ist definiert als

$$\text{sconv } A := \bigcap_{\substack{K \in \tilde{\mathcal{K}}(\mathbb{S}^{d-1}) \\ A \subseteq K}} K.$$

**Bemerkung 2.2:** (i) Die häufig erhobene zusätzliche Forderung, dass eine sphärisch-konvexe Menge in einer offenen Halbsphäre liegen muss, wird hier nicht erhoben. Es zeigt sich damit eine stärkere Analogie zum Konvexitätsbegriff im euklidischen Raum  $\mathbb{E}^d$ , wo z. B. alle affinen Unterräume und alle offenen und abgeschlossenen Halbuntersphären konvexe Mengen sind. So sind ebenfalls alle Untersphären und alle offenen und abgeschlossenen Unterhalbsphären sphärisch-konvexe Mengen. Insbesondere ist z. B. ein diametrales Punktepaar als nulldimensionale Untersphäre eine sphärisch-konvexe Menge.

(ii) Der hier eingeführte Konvexitätsbegriff unterscheidet sich außerdem von der metrischen Konvexität, wie sie von K. Menger [Men], J. de Groot [Gro] und anderen Autoren eingeführt wurde. Auf der Sphäre ist in natürlicher Weise ein Abstand  $d$  gegeben (z. B. durch den Winkel zwischen  $a, b \in \mathbb{S}^{d-1}$ ), wodurch  $(\mathbb{S}^{d-1}, d)$  zu einem metrischen Raum wird. Nun kann man zu zwei Punkten  $a, b \in \mathbb{S}^{d-1}$  eine  $d$ -Strecke definieren durch  $[a, b]_d := \{x \in \mathbb{S}^{d-1} : d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)\}$ . Eine Menge  $K \subseteq \mathbb{S}^{d-1}$  heißt dann  $d$ -konvex, wenn zu je zwei Punkten  $a, b \in K$  auch die  $d$ -Strecke  $[a, b]_d$  zu  $K$  gehört. Da die  $d$ -Strecke  $[a, b]_d$  zweier diametraler Punkte bereits die ganze Sphäre ist, ist  $\mathbb{S}^{d-1}$  die einzige Untersphäre, die  $d$ -konvex ist.

(iii) Da der Durchschnitt sphärisch-konvexer Mengen wieder eine sphärisch-konvexe Menge ist und ferner die ganze Sphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$  konvex ist, ist  $\text{sconv}$  ein Hülloperator auf  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Dies ist nicht bei allen in der Literatur betrachteten Konvexitätsbegriffen auf der Sphäre der Fall.

**Definition 2.6:** (a) Eine  $(d-2)$ -dimensionale Untersphäre  $S$  von  $\mathbb{S}^{d-1}$  heißt *Stütz-sphäre* an einen sphärisch-konvexen Körper  $K \subseteq \mathbb{S}^{d-1}$ , wenn  $S \cap K \neq \emptyset$  und  $K$  ganz in einer der beiden von  $S$  begrenzten abgeschlossenen Halbsphären enthalten ist.  $S \cap K$  heißt dann *Stützmenge* oder *Seite* von  $K$ .

(b) Die *Dimension* einer sphärisch-konvexen Menge  $K \in \tilde{\mathcal{K}}(\mathbb{S}^{d-1})$  wird definiert durch

$$\dim K := \dim(\text{lin } K) - 1.$$

**Definition 2.7:** (a) Eine Punktmenge  $P \subseteq \mathbb{S}^{d-1}$  heißt *sphärisches Polytop*, falls es die sphärisch-konvexe Hülle einer endlichen Menge  $M \subseteq \mathbb{S}^{d-1}$  ist. Die Menge aller nichtleeren Polytope der Sphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$  wird mit  $\mathfrak{P}(\mathbb{S}^{d-1})$  bezeichnet.

(b) Ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}^{d-1})$  heißt *eigentlich*, wenn  $\dim P = d-1$  ist. Die Familie der eigentlichen Polytope der Sphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{P}_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})$ .

- (c)  $F$  heißt *k-dimensionale Seite* oder kurz *k-Seite* von  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}^{d-1})$ , wenn es eine Stützsphäre  $S$  an  $P$  gibt, sodass  $F = S \cap P$  und  $\dim F = k$  gilt. Die Menge aller  $k$ -dimensionalen Seiten von  $P$  wird mit  $\mathfrak{F}_k(P)$  bezeichnet. Die nulldimensionalen Seiten heißen *Ecken*. Die Menge aller Eckpunkte von  $P$  wird auch mit  $\text{vert}(P)$  bezeichnet. Die eindimensionalen Seiten heißen *Kanten*. Für  $k = d - 3$  heißt  $F$  auch *Hyperkante* und für  $k = d - 2$  (*Hyper-*)*Seitenfläche*. Dazu zählen wir weiterhin die beiden uneigentlichen Seiten  $\emptyset$  und  $P$ . Der leeren Menge wird dabei die Dimension  $\dim \emptyset = -1$  zugeordnet. Es gilt dann für jedes eigentliche Polytop  $P$ :  $\mathfrak{F}_{-1}(P) := \{\emptyset\}$  und  $\mathfrak{F}_{d-1}(P) := \{P\}$ . Ist  $P$  uneigentlich, so ist  $\mathfrak{F}_{d-1}(P) := \emptyset$ . Für die Menge aller Seiten von  $P$  verwenden wir das Symbol  $\mathfrak{F}(P) := \bigcup_{k=-1}^{d-1} \mathfrak{F}_k(P)$ . Die Menge aller eigentlichen Seiten von  $P$  bezeichnen wir schließlich mit  $\mathfrak{F}_*(P) := \bigcup_{k=0}^{d-2} \mathfrak{F}_k(P)$ .

**Bemerkung 2.3:** Nach dieser Definition sind auch Untersphären und abgeschlossene Halbsphären von  $\mathbb{S}^{d-1}$  Polytope. Sphärische Polytope müssen also nicht unbedingt Ecken besitzen. Etwas unschön an dieser Definition ist, dass auch diametrale Punktpaare als *eine* Ecke aufgefasst werden. Für unsere Zwecke ist das aber nicht von Bedeutung.

Wir benötigen nun noch den Begriff des (relativ) offenen sphärischen Polytops.

**Definition 2.8:** (a) Eine Punktmenge  $\check{P} \subseteq \mathbb{S}^{d-1}$  heißt (*relativ*) *offenes sphärisches Polytop*, falls es ein sphärisches Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}^{d-1})$  gibt, sodass  $\check{P} = \text{rel int } P$  ist. Die Menge aller nichtleeren offenen Polytope der Sphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$  wird mit  $\check{\mathfrak{P}}(\mathbb{S}^{d-1})$  bezeichnet.

- (b)  $\check{F}$  heißt *k-dimensionale Seite* oder kurz *k-Seite* eines offenen sphärischen Polytops  $\check{P} \in \check{\mathfrak{P}}(\mathbb{S}^{d-1})$ , wenn es eine  $k$ -Seite  $F \in \mathfrak{F}_k(\text{cl } P)$  gibt, sodass  $\check{F} = \text{rel int } F$  ist. Die Menge aller  $k$ -dimensionale Seiten von  $\check{P}$  wird mit  $\check{\mathfrak{F}}_k(P)$  bezeichnet. Ebenso verwenden wir die Bezeichnungen  $\check{\mathfrak{F}}(P) := \bigcup_{k=-1}^{d-1} \check{\mathfrak{F}}_k(P)$  und  $\check{\mathfrak{F}}_*(P) := \bigcup_{k=0}^{d-2} \check{\mathfrak{F}}_k(P)$ .

**Bemerkung 2.4:** (i) Das relative Innere  $\text{rel int } P$  ist dabei bzgl. der kleinsten Untersphäre zu betrachten, die  $P$  enthält. Für nulldimensionale Polytope (also einpunktige Mengen oder diametrale Punktpaare) und ebenso für die ganze Sphäre und alle Untersphären stimmen dabei die offenen mit den abgeschlossenen Polytopen überein.

- (ii) Für jedes offene sphärische Polytop  $\check{P} \in \check{\mathfrak{P}}(\mathbb{S}^{d-1})$  ist  $\text{cl } \check{P} \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}^{d-1})$ . Jedes (abgeschlossene) sphärische Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}^{d-1})$  besitzt folgende Zerlegung in offene sphärische Polytope:

$$P = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}(P)} \text{rel int } F = \bigcup_{\check{F} \in \check{\mathfrak{F}}(\text{rel int } P)} \check{F}.$$

## 2.3. Winkel und Winkelmaße von Polytopen

### 2.3.1. Projektionskegel und innere Winkel

Bei den weiteren Untersuchungen von Polytopen treten verschiedene Winkel und Winkelmaße auf. Zunächst steht der übliche Winkelbegriff für Vektoren zur Verfügung.

**Definition 2.9:** Für zwei Vektoren  $u, v \in \mathbb{E}^d$ ,  $u, v \neq o$  ist  $\varphi \in [0, \pi]$  die Größe des Winkels zwischen  $u$  und  $v$  : $\Longleftrightarrow$

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}. \quad (2.1)$$

Für  $\varphi$  verwenden wir auch die Bezeichnung  $\varphi = \angle(u, v)$ .

Damit können wir die Größe der inneren Winkel von Polygonen definieren.

**Definition 2.10:** Es sei  $P \in \mathfrak{P}_2(\mathbb{E}^2)$  ein Polygon mit den Ecken  $A_1, \dots, A_n = A_0$  (in positivem Umlaufsinn geordnet). Weiter seien  $\vec{a}_i := A_{i+1} - A_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) die Seitenvektoren von  $P$ . Die Größe des Innenwinkels der Ecke  $A_i$  von  $P$  ist dann

$$\alpha(A_i) := \angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1}). \quad (2.2)$$

**Bemerkung 2.5:** Die Größe des Innenwinkels kann man ebenso mit Hilfe der äußeren Normaleneinheitsvektoren der Seiten von  $P$  definieren:

Es sei  $\hat{a}_i$  der äußere Normaleneinheitsvektor der Seite  $\overline{A_i A_{i+1}}$ , ( $i = 0, \dots, n-1$ ). Dann gilt für die Größe des Innenwinkels der Ecke  $A_i$  von  $P$ :

$$\alpha(A_i) = \angle(\hat{a}_i, -\hat{a}_{i-1}). \quad (2.3)$$

Die Beziehung (2.3) lässt sich nun verallgemeinern und ermöglicht es für beliebige eigentliche  $d$ -dimensionale Polytope den Keilwinkel zu definieren.

**Definition 2.11:** Es sei  $P \in \mathfrak{P}_d(\mathbb{E}^d)$  ein eigentliches  $d$ -Polytop und  $F \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)$  eine Hyperkante.  $F$  besitzt dann genau zwei  $(d-1)$ -dimensionale Seitenflächen  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{d-1}(P)$ , die an  $F$  angrenzen (d.h. es gilt  $F = F_1 \cap F_2$ ).  $u_1$  und  $u_2$  seien die beiden äußeren Normaleneinheitsvektoren von  $F_1$  bzw.  $F_2$ . Die Größe des (inneren) Keilwinkels der Hyperkante  $F$  von  $P$  ist dann

$$\alpha(F) := \angle(u_1, -u_2). \quad (2.4)$$

Damit haben wir bisher nur Winkelgrößen definiert. Die Winkel selbst sollen jedoch als gewisse Punktmengen aufgefasst werden. In der euklidischen Ebene soll unter einem (nichtgestreckten) Winkel die konvexe Hülle zweier Strahlen mit gemeinsamen Endpunkt verstanden werden. Für konvexe Polygone kann dieser mit Hilfe der Projektionskegel beschrieben werden.



**Definition 2.12:** Es sei  $M \subseteq \mathbb{E}^d$  eine nichtleere Menge und  $x_0 \in \mathbb{E}^d$ . Dann heißt

$$\text{cone}(x_0, M) = \{x \in \mathbb{E}^d : x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda y, y \in M, \lambda \geq 0\} \quad (2.5)$$

der *Projektionskegel* von  $M$  bzgl.  $x_0$ .

**Definition 2.13:** Es sei  $P \in \mathfrak{P}_2(\mathbb{E}^2)$  ein konvexes Polygon. Für eine Ecke  $A \in \text{vert}(P)$  heißt  $\psi(A) := \text{cone}(A, P)$  *innerer Winkel* der Ecke  $A$ .

**Lemma 2.5:** Für jedes konvexe Polygon  $P \in \mathfrak{P}_2(\mathbb{E}^2)$  gilt für jede Ecke  $A \in \text{vert } P$

$$\alpha(A) = \sigma_1((\psi(A) - A) \cap \mathbb{S}^1). \quad (2.6)$$

BEWEIS: Es sei  $P \in \mathfrak{P}_2(\mathbb{E}^2)$  ein Polygon mit den Ecken  $A_1, \dots, A_n = A_0$  (in positivem Umlaufsinn geordnet). Weiter seien  $\vec{a}_i := A_{i+1} - A_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) die Seitenvektoren von  $P$ . Für eine Ecke  $A_i \in \text{vert } P$  wird  $\psi(A_i)$  durch die Translation um  $-A_i$  so verschoben, dass der Scheitel von  $\psi(A_i) - A_i$  im Ursprung liegt. Für  $\psi(A_i) - A_i$  gilt dann  $\psi(A_i) - A_i = \text{cone}(o, P - A_i) = \{x \in \mathbb{E}^d : x = \lambda y, y \in P - A_i, \lambda \geq 0\}$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (\psi(A_i) - A_i) \cap \mathbb{S}^1 &= \{x \in \mathbb{E}^d : x = \lambda y, y \in P - A_i, \lambda \geq 0, \|x\| = 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{E}^d : x = \frac{y}{\|y\|}, y \in P - A_i, \|y\| > 0\right\}. \end{aligned}$$

Das ist nun aber ein Kreisbogen, der von  $\frac{\vec{a}_i}{\|\vec{a}_i\|}$  und  $-\frac{\vec{a}_{i-1}}{\|\vec{a}_{i-1}\|}$  begrenzt wird. Für diesen gilt dann  $\sigma_1((\psi(A_i) - A_i) \cap \mathbb{S}^1) = \angle\left(\frac{\vec{a}_i}{\|\vec{a}_i\|}, -\frac{\vec{a}_{i-1}}{\|\vec{a}_{i-1}\|}\right) = \angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1}) = \alpha(A_i)$ . q.e.d.

Analog zu Definition 2.13 kann man ebenso Raumwinkel für Ecken von Polytopen im  $\mathbb{E}^d$  einführen. Dies eröffnet die Möglichkeit für Raumwinkel Winkelmaße einzuführen.

**Definition 2.14:** Es sei  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ein Polytop mit  $\dim P > 0$  und  $A \in \text{vert } P$ . Dann heißt

- (a)  $\psi(A) := \text{cone}(A, P)$  *innerer Raumwinkel* der Ecke  $A$ .
- (b)  $\alpha(A) := \sigma_{d-1}((\psi(A) - A) \cap \mathbb{S}^{d-1})$  die *Größe des inneren Raumwinkels* von  $A$ .

### 2.3.2. Normalenkegel und äußere Winkel

Außerdem benötigen wir noch den Begriff des äußeren Winkels.

**Definition 2.15:** Es sei  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ein Polytop und  $F \in \mathfrak{F}_k(P)$  eine  $k$ -dimensionale Seite von  $P$ . Dann heißt

- (a)  $\check{N}_F := \{u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : F = F_P(u)\}$  der *relativ offene Normalenkegel* der Seite  $F$  und

(b)  $N_F := \left\{ u \in \mathbb{E}^d : \bigwedge_{x \in F} \bigwedge_{y \in P} (\langle y - x, u \rangle \leq 0) \right\}$  der (abgeschlossene) Normalenkegel der Seite  $F$ .

**Bemerkung 2.6:** Für die beiden uneigentlichen Seiten  $\emptyset \in \mathfrak{F}_{-1}(P)$  und  $P \in \mathfrak{F}_d(P)$  eines eigentlichen  $d$ -dimensionalen Polytops  $P \in \mathfrak{P}_d(\mathbb{E}^d)$  gilt  $\check{N}_{\emptyset} = \emptyset$ ,  $N_{\emptyset} = \mathbb{E}^d$  und  $\check{N}_P = \emptyset$ ,  $N_P = \{o\}$ . Die ersten drei Behauptungen folgen dabei direkt aus der Definition. Außerdem ist  $o \in N_P$ , da für alle  $z \in \mathbb{E}^d$  stets  $\langle z, o \rangle = 0$  gilt. Sei nun  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$ . Da  $P$  ein eigentliches Polytop ist gibt es eine Kugel  $K$ , die ganz in  $P$  enthalten ist. Damit existieren  $x, y \in K \subseteq P$  mit  $y - x = \mu u$  für ein  $\mu > 0$ . Für das Skalarprodukt  $\langle y - x, u \rangle$  gilt dann  $\langle y - x, u \rangle = \langle \mu u, u \rangle = \mu \langle u, u \rangle > 0$ . Also liegt  $u$  nicht in  $N_P$ .

Der Normalenkegel einer Seite  $F$  eines Polytops  $P$  besitzt unter anderem folgende Darstellungen:

**Lemma 2.6:** Es sei  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ein Polytop und  $F \in \mathfrak{F}(P)$  Seite von  $P$ . Dann hat  $N_F$  folgende äquivalente Darstellungen:

$$N_F = \left\{ u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : \bigwedge_{x \in F} \bigwedge_{y \in P} (\langle y - x, u \rangle \leq 0) \right\} \cup \{o\}, \quad (2.7)$$

$$N_F = \left\{ u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : \bigwedge_{x \in F} (\langle x, u \rangle = h_P(u)) \right\} \cup \{o\}, \quad (2.8)$$

$$N_F = \left\{ u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : F \subseteq H_P(u) \right\} \cup \{o\}, \quad (2.9)$$

$$N_F = \left\{ u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : F \subseteq F_P(u) \right\} \cup \{o\}, \quad (2.10)$$

BEWEIS: Die Darstellung (2.7) ergibt sich direkt aus Definition 2.15, da für alle  $z \in \mathbb{E}^d$  stets  $\langle z, o \rangle = 0$  gilt.

Da nach Definition 2.3(i) die Stützfunktion  $h_P(u) = \sup\{\langle y, u \rangle : y \in P\}$  ist, gilt für alle  $y \in P$   $\langle y, u \rangle \leq h_P(u)$ . Daraus ergibt sich  $\langle y, u \rangle \leq \langle x, u \rangle$  und damit  $\langle y - x, u \rangle \leq 0$ . Also ist

$$\left\{ u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : \bigwedge_{x \in F} (\langle x, u \rangle = h_P(u)) \right\} \subseteq \left\{ u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : \bigwedge_{x \in F} \bigwedge_{y \in P} (\langle y - x, u \rangle \leq 0) \right\}$$

Gilt andererseits  $\langle y - x, u \rangle \leq 0$  für alle  $x \in F$  und  $y \in P$ , also auch  $\langle y, u \rangle \leq \langle x, u \rangle$ , so gilt für das Supremum  $\sup\{\langle y, u \rangle : y \in P\} \leq \langle x, u \rangle$ . Da  $F \subseteq P$ , erhalten wir  $h_P(u) = \sup\{\langle y, u \rangle : y \in P\} = \langle x, u \rangle$ . Somit gilt ebenso die umgekehrte Inklusion und wir erhalten die Darstellung (2.8).

Nach Definition 2.3(ii) ist  $H_P(u) = \{x \in \mathbb{E}^d : \langle x, u \rangle = h_P(u)\}$ . Ist  $F \subseteq H_P(u)$ , so gilt offensichtlich für alle  $x \in F$ ,  $\langle x, u \rangle = h_P(u)$  und umgekehrt. Damit erhalten wir die Darstellung (2.9).

Da stets  $F \subseteq P$  gilt, ist  $F \subseteq H_P(u) \iff F \subseteq F_P(u) (= H_P(u) \cap P)$ . Also gilt auch die Darstellung (2.10). q.e.d.

**Lemma 2.7:** Für jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  und jede Seite  $F \in \mathfrak{F}(P)$  von  $P$  ist  $N_F$  abgeschlossen.

BEWEIS: Es sei  $(u_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge aus  $N_F$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ . Damit gilt für jedes  $u_n$ , dass das Skalarprodukt  $\langle y - x, u_n \rangle \leq 0$  ist, für alle  $x \in F$  und alle  $y \in P$ . Aus der Stetigkeit des Skalarproduktes folgt  $\langle y - x, u \rangle = \langle y - x, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y - x, u_n \rangle \leq 0$ . Also ist auch  $u \in N_F$  und somit ist  $N_F$  abgeschlossen. q.e.d.

**Lemma 2.8:** Für zwei Seiten  $F, G \in \mathfrak{F}(P)$  eines Polytops  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  mit  $F \subseteq G$  gilt stets  $N_F \supseteq N_G$ .

BEWEIS: Ist  $u \in N_G$ , so gilt wegen der Darstellung (2.10)  $G \subseteq F_P(u)$ . Da  $F \subseteq G$  ist, erhalten wir  $F \subseteq F_P(u)$ . Somit ist auch  $u \in N_F$ . q.e.d.

**Lemma 2.9:** Es seien  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}(P)$  zwei Seiten eines Polytops  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  und  $F := \langle F_1 \cup F_2 \rangle$  die von  $F_1$  und  $F_2$  erzeugte Seite. Für die Normalenkegel gilt dann  $N_F = N_{F_1} \cap N_{F_2}$ .

BEWEIS: Zunächst ist natürlich  $F_1, F_2 \subseteq F$ . Demzufolge gilt nach Lemma 2.8  $N_F \subseteq N_{F_1} \cap N_{F_2}$ . Es sei nun  $u \in N_{F_1} \cap N_{F_2}$ . Dann gilt wegen der Darstellung (2.10)  $F_1, F_2 \subseteq F_P(u)$  und damit auch  $F_1 \cup F_2 \subseteq F_P(u)$ . Die von  $F_1$  und  $F_2$  erzeugte Seite von  $P$  ist definiert als

$$F = \langle F_1 \cup F_2 \rangle = \bigcap_{\substack{G \in \mathfrak{F}(P) \\ F_1 \cup F_2 \subseteq G}} G. \quad (2.11)$$

Nun ist  $F_P(u)$  eine der Seiten, die in (2.11) zum Schnitt gebracht werden. Damit erhalten wir die Inklusion  $F = \langle F_1 \cup F_2 \rangle \subseteq F_P(u)$ . Also ist  $u \in N_F$  und es gilt somit die umgekehrte Inklusion  $N_{F_1} \cap N_{F_2} \subseteq N_F$ . q.e.d.

**Lemma 2.10:** Für jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  und jede  $k$ -dimensionale Seite  $F \in \mathfrak{F}_k(P)$  ( $0 \leq k < d$ ) von  $P$  gilt:

$$N_F = \text{cl } \check{N}_F.$$

BEWEIS: Wir gehen von der Darstellung (2.10) von  $N_F$  aus. Offensichtlich ist  $\{u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : F = F_P(u)\} \subseteq \{u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : F \subseteq F_P(u)\}$ , also auch  $\check{N}_F \subseteq N_F$ . Es sei nun  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$  und  $F \subset F_P(u)$ . Weiter sei  $v \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$  ein Richtungsvektor mit  $F = F_P(v)$ . Für jeden Punkt  $x \in F$  gilt dann  $\langle x, u \rangle = h_P(u)$  sowie  $\langle x, v \rangle = h_P(v)$  und für jeden Punkt  $y \in P$  mit  $y \notin F$  gilt  $\langle y, u \rangle \leq h_P(u)$  und  $\langle y, v \rangle < h_P(v)$ . Wir betrachten nun den Richtungsvektor  $(1-\lambda)u + \lambda v$  für  $\lambda \in (0, 1)$ . Es gilt dann für  $x \in F$ :  $\langle x, (1-\lambda)u + \lambda v \rangle = (1-\lambda)\langle x, u \rangle + \lambda\langle x, v \rangle = (1-\lambda)h_P(u) + \lambda h_P(v)$ . Für  $y \in P$  mit  $y \notin F$  erhalten wir  $\langle y, (1-\lambda)u + \lambda v \rangle = (1-\lambda)\langle y, u \rangle + \lambda\langle y, v \rangle < (1-\lambda)h_P(u) + \lambda h_P(v)$ . Demnach ist  $F$  ebenfalls Seite in Richtung  $(1-\lambda)u + \lambda v$ .

Wir wählen nun eine Folge  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$  aus  $(0, 1)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ , z.B.  $\lambda_n := \frac{1}{n}$ . Dann ist  $F = F_P((1-\lambda_n)u + \lambda_n v)$  und somit  $(1-\lambda_n)u + \lambda_n v \in \check{N}_F$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Infolgedessen ist  $u \in \text{cl } \check{N}_F$ . Nach 2.2 (ii) ist  $F_K(u) = F_K(\lambda u)$  für alle  $\lambda > 0$ , also auch für alle Folgenglieder von  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ . Da  $\dim F \neq -1, d$  ist, gibt es stets eine Richtung  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$ ,

sodass  $F = F_P(u)$  ist. Somit ist  $u \in \check{N}_F$ . Folglich ist ebenso  $o = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n u \in \text{cl } \check{N}_F$ . Wir erhalten also die Inklusion  $N_F \subseteq \text{cl } \check{N}_F$ . Da nach Lemma 2.7  $N_F$  abgeschlossen ist und  $\check{N}_F \subseteq N_F$  gilt, erhalten wir  $\text{cl } \check{N}_F \subseteq \text{cl } N_F = N_F$ . Insgesamt ergibt sich damit  $N_F = \text{cl } \check{N}_F$ . q.e.d.

**Lemma 2.11:** *Für jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  erhalten wir folgende disjunkte bzw. elementare Zerlegungen des  $\mathbb{E}^d$ :*

$$(i) \quad \bigcup_{k=0}^{d-1} \bigcup_{F \in \mathfrak{F}_k(P)} \check{N}_F = \mathbb{E}^d \setminus \{o\},$$

$$(ii) \quad \biguplus_{F \in \mathfrak{F}_0(P)} N_F = \mathbb{E}^d.$$

BEWEIS: (i) Zunächst gilt für zwei verschiedene Seiten  $F \in \mathfrak{F}_k(P)$  und  $G \in \mathfrak{F}_l(P)$  ( $0 \leq k, l < d$ ), dass  $\check{N}_F \cap \check{N}_G = \emptyset$ , da zu jeder Richtung  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$  die entsprechende Seite in Richtung  $u$  eindeutig bestimmt ist. Umgekehrt gibt es natürlich ebenso zu jeder Richtung  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$  eine Seite  $F \in \mathfrak{F}_k(P)$  für ein  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  mit  $F = F_P(u)$ .

(ii) Aus der Aussage (i) und Lemma 2.10 erhalten wir zunächst

$$\bigcup_{k=0}^{d-1} \bigcup_{F \in \mathfrak{F}_k(P)} N_F = \mathbb{E}^d. \quad (2.12)$$

Sind  $F, G \in \mathfrak{F}(P)$ ,  $F, G \neq \emptyset$ , zwei Seiten von  $P$  mit  $F \subseteq G$ , so gilt wegen Lemma 2.8  $N_F \supseteq N_G$ . Da jede Seite von  $P$  stets einen Eckpunkt enthält, können wir in der Darstellung (2.12) alle Seiten  $F$  weglassen, deren Dimension  $\dim F \geq 1$  ist. Damit erhalten wir

$$\bigcup_{F \in \mathfrak{F}_0(P)} N_F = \mathbb{E}^d. \quad (2.13)$$

Es seien nun  $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_0(P)$ ,  $F_1 \neq F_2$  zwei Ecken von  $P$  und  $F := \langle F_1 \cup F_2 \rangle$  die von  $F_1$  und  $F_2$  erzeugte Seite. Nach Lemma 2.9 gilt dann  $N_{F_1} \cap N_{F_2} = N_F$ . Da  $F_1 \neq F_2$  ist, kann  $F$  keine Ecke sein. Also ist  $\dim F \geq 1$ .

Es bezeichne  $U$  den zu  $\text{aff}(F)$  gehörenden linearen Unterraum. Dieser lässt sich darstellen als  $U = \text{aff}(F) - x_0 = \text{lin}(F - x_0)$  für ein  $x_0 \in F$ . Es sei nun  $u \in N_F$ . Dann gilt nach Darstellung (2.8) aus Lemma 2.6 für alle  $x \in F$ :  $\langle x, u \rangle = h_P(u) = \langle x_0, u \rangle$ . Damit erhalten wir  $\langle x - x_0, u \rangle = 0$ . Jedes  $v \in U$  lässt sich nun als Linearkombination von Elementen aus  $F - x_0$  darstellen:  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_0)$  für gewisse  $x_1, \dots, x_n \in F$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Für jedes  $v \in U$  und jedes  $u \in N_F$  gilt damit

$$\langle v, u \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_0), u \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i - x_0, u \rangle = 0.$$

Also ist  $u \in U^\perp$  und damit  $N_F \subseteq U^\perp$ .

Nun gilt für die Dimension  $\dim U = \dim F \geq 1$  und damit  $\dim U^\perp = d - \dim U = d - \dim F \leq d - 1$ . Da  $N_F \subseteq U^\perp$  erhalten wir  $\dim N_F = \dim U^\perp \leq d - 1$ . Also ist  $\text{int}(N_{F_1} \cap N_{F_2}) = \text{int } N_F = \emptyset$  und wir erhalten die elementare Zerlegung

$$\bigsqcup_{F \in \mathfrak{F}_0(P)} N_F = \mathbb{E}^d.$$

q.e.d.

**Folgerung 2.4:** Für jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  erhalten wir folgende disjunkte bzw. elementare Zerlegungen der Einheitssphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$ :

$$(i) \quad \bigcup_{k=0}^{d-1} \bigcup_{F \in \mathfrak{F}_k(P)} (\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) = \mathbb{S}^{d-1},$$

$$(ii) \quad \bigsqcup_{F \in \mathfrak{F}_0(P)} (N_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) = \mathbb{S}^{d-1}.$$

**Definition 2.16:** Es sei  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ein Polytop und  $F \in \mathfrak{F}_k(P)$  ( $0 \leq k < d$ ) eine  $k$ -dimensionale Seite von  $P$ . Dann heißt

$$\delta(F) := \sigma_{d-k-1}(N_F \cap \mathbb{S}^{d-1})$$

die Größe des äußeren Winkels von  $F$ .

**Folgerung 2.5:** Für jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  gilt:

$$\sum_{F \in \mathfrak{F}_0(P)} \delta(F) = \omega_d.$$

BEWEIS: Unter Verwendung von Folgerung 2.4 (ii) und der Additivität von  $\sigma_{d-1}$  erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathfrak{F}_0(P)} \delta(F) &= \sum_{F \in \mathfrak{F}_0(P)} \sigma_{d-1}(N_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) = \sigma_{d-1} \left( \bigsqcup_{F \in \mathfrak{F}_0(P)} (N_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) \right) \\ &= \sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) = \omega_d. \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

# 3. Minkowskische Zerlegungsgleichheit von Polytopen

In diesem Kapitel wird die Minkowskische Zerlegungsgleichheit untersucht. Interessant ist dabei besonders der Fall, wenn als Transformationsgruppe die euklidischen Bewegungen betrachtet werden. Als Mengensystem sei dabei die Menge der konvexen Körper, also der nichtleeren kompakten und konvexen Teilmengen des  $\mathbb{E}^d$ , zugrunde gelegt. Das heißt einerseits sollen die untersuchten Teilmengen des  $\mathbb{E}^d$  konvexe Körper sein und andererseits auch die einzelnen Zerlegungsteile. Insbesondere werden wir die Zerlegungsgleichheit von Polytopen genauer untersuchen.

Für diesen Spezialfall sei hier noch einmal eine Präzisierung von Definition 1.2 angeben, wobei ein besonderes Symbol eingeführt werden soll.

**Definition 3.1:** Zwei konvexe Mengen  $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  heißen *Minkowski-zerlegungsgleich* (bzgl. der euklidischen Bewegungen  $\mathcal{B}_d$ )

$$A \stackrel{z}{=} B \quad :\Longleftrightarrow \quad A = \bigoplus_{i=1}^n A_i \quad \wedge \quad B = \bigoplus_{i=1}^n B_i \quad \wedge \quad A_i, B_i \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d) \quad \wedge \quad A_i \cong B_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Da Polytope im Minkowskischen Sinne nur in (möglicherweise niederdimensionale) Polytope zerlegt werden können, sind in diesem Falle alle Zerlegungsteile ebenfalls Polytope. Insbesondere können Polytope nur mit Polytopen zerlegungsgleich sein.

## 3.1. Notwendige Bedingungen

### 3.1.1. Die mittlere Breite eines konvexen Körpers

Eine wichtige Größe für konvexe Körper ist die mittlere Breite. Sie erweist sich als nützliches Kriterium für die Untersuchung der Zerlegungsgleichheit konvexer Körper und insbesondere der konvexen Polytope.

**Definition 3.2:** Sei  $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  eine konvexe Menge.

(a) *Breite* von  $K$  in Richtung  $u$ :

$$w_K(u) := h_K(u) + h_K(-u),$$

(b) *mittlere Breite* von  $K$ :

$$b(K) := \frac{2}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_K(u) \, du,$$

(c) *Steinerpunkt* von  $K$ :

$$s(K) := \frac{1}{\kappa_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u h_K(u) \, du.$$

**Bemerkung 3.1:** (i) Für  $d = 1$  ist jede konvexe Menge eine Strecke. Die mittlere Breite ist dann gleich der Länge der Strecke.

(ii) Für  $d = 2$  ist die mittlere Breite im wesentlichen gleich dem Umfang der konvexen Menge. Sie unterscheiden sich nur um eine Konstante.

(iii) Betrachtet man  $k$ -dimensionale konvexe Mengen im  $\mathbb{E}^d$  ( $k < d$ ), so kann man einerseits die mittlere Breite in einem  $k$ -dimensionalen affinen Unterraum des  $\mathbb{E}^d$  bestimmen, andererseits aber auch den gesamten  $\mathbb{E}^d$  der Messung zugrunde legen. Die Ergebnisse unterscheiden sich dann ebenfalls nur um eine Konstante.

(iv) Für die Untersuchung Minkowskischer Zerlegungen kommt es auf die translative Lage der zu untersuchenden Punktmengen und deren Teile nicht an. Deshalb genügt es, aus jeder Äquivalenzklasse translationsgleicher Punktmengen einen Repräsentanten auszuwählen. Für konvexe Körper kann man zum Beispiel als Vertreter diejenigen konvexen Körper wählen, deren Steinerpunkt im Ursprung liegt. Die Familie dieser konvexen Körper soll mit  $\mathfrak{K}_o(\mathbb{E}^d)$  bezeichnet werden. Entsprechend wird die Familie der Polytope, deren Steinerpunkt im Ursprung liegt, mit  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^d)$  bezeichnet.

**Lemma 3.1:** [Lei, S. 188] bzw. [Sch, S. 42f] *Es sei  $K, L \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$ ,  $\lambda \geq 0$  und  $\gamma \in \mathcal{B}_d$ . Dann ist die mittlere Breite*

(i) *Minkowski-additiv:*

$$b(K \oplus L) = b(K) + b(L),$$

(ii) *homogen vom Grade 1:*

$$b(\lambda K) = \lambda b(K),$$

(iii) *und bewegungsinvariant:*

$$b(\gamma(K)) = b(K).$$

**BEWEIS:** (i) und (ii) folgen aus den Eigenschaften der Stützfunktion.

(iii) Ist  $\gamma$  eine Translation um  $t \in \mathbb{E}^d$ , so gilt wegen der Eigenschaft (i) aus Lemma 2.1

$$\begin{aligned} b(K+t) &= \frac{2}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_{K+t}(u) \, du \\ &= \frac{2}{\omega_d} \left( \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_K(u) \, du}_{b(K)} + \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle t, u \rangle \, du}_{=0} \right). \end{aligned}$$

Da über die ganze Sphäre integriert wird und  $\langle t, u \rangle = -\langle t, -u \rangle$ , ist das zweite Integral gleich Null. Damit ist  $b(K+t) = b(K)$ .

Ist  $\gamma$  eine Rotation um den Ursprung  $o$ , so gilt  $h_{\gamma(K)}(u) = h_K(\gamma^{-1}(u))$ . Dann ist

$$\begin{aligned} b(\gamma(K)) &= \frac{2}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_{\gamma(K)}(u) \, du \\ &= \frac{2}{\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h_K(\gamma^{-1}(u)) \, du. \end{aligned}$$

Da das Oberflächenmaß auf  $\mathbb{S}^{d-1}$  rotationsinvariant ist, ist  $b(\gamma(K)) = b(K)$ .

Ist schließlich  $\gamma$  eine Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung, so erfolgt der Beweis analog. q.e.d.

Aus diesen Eigenschaften der mittleren Breite folgt unmittelbar

**Satz 3.1:** *Eine notwendige Bedingung für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit zweier konvexer Körper  $K, L \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  ist die Gleichheit der mittleren Breite.*

### 3.1.2. Die Dehnschen Bedingungen

Sucht man nach weiteren notwendigen Bedingungen, so bieten sich für Polytope in höheren Dimensionen die Dehnschen Bedingungen an. Diese sind wie folgt definiert:

**Definition 3.3:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  eine rational-lineare Funktion mit  $f(\pi) = 0$ . Für eine Kante  $e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)$  bezeichne  $V_{d-2}(e)$  das  $(d-2)$ -dimensionale Volumen der Kante und  $\alpha(e)$  die Keilwinkelgrößen zwischen den beiden anliegenden  $(d-1)$ -dimensionalen Seitenflächen. Dann heißt

$$D_f(P) := \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} V_{d-2}(e) \cdot f(\alpha(e))$$

*Dehnsches Funktional* (zur Funktion  $f$ ) von  $P$ . Ist  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ein uneigentliches Polytop, so setzen wir  $D_f(P) := 0$ .



**Bemerkung 3.2:** Wir fassen also  $\mathbb{R}$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q})$  auf. Dieser ist unendlich-dimensional. Eine Hamelbasis von  $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q})$  kann man allerdings nicht konkret angeben. Deshalb lässt sich solch eine rational-lineare Funktion  $f$  i. a. nicht explizit angeben. Da ein Polyeder aber nur endlich viele verschiedene Keilwinkelgrößen besitzt, genügen für unsere Zwecke endlich-dimensionale Unterräume von  $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q})$ . Damit können wir uns auf solche Funktionale  $f$  beschränken, die außerhalb eines endlich-dimensionalen Unterraums von  $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q})$  verschwinden. Diese lassen sich explizit angeben. Damit lässt sich für jedes Polyeder das Dehnsche Funktional für solche  $f$  konkret bestimmen.

Die Dehnschen Funktionale besitzen folgende Eigenschaften:

**Lemma 3.2: (Eigenschaften der Dehnschen Funktionale)** *Für alle Dimensionen  $d \geq 3$  und alle rational-linearen Funktionale  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  mit  $f(\pi) = 0$  gilt:*

(i)  $D_f$  ist bewegungsinvariant:

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( P \cong Q \implies D_f(P) = D_f(Q) \right),$$

(ii)  $D_f$  ist additiv bzgl. der elementargeometrischen Summe:

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( D_f(P \uplus Q) = D_f(P) + D_f(Q) \right),$$

(iii)  $D_f$  ist homogen vom Grade  $d - 2$ :

$$\bigwedge_{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \bigwedge_{\lambda > 0} \left( D_f(\lambda \cdot P) = \lambda^{d-2} \cdot D_f(P) \right).$$

**BEWEIS:** (i) Die Bewegungsinvarianz ergibt sich direkt aus der Definition.

(ii) Der Beweis der Additivität bezüglich der elementargeometrischen Summe ist elementar. Da wir diese Eigenschaft im Folgenden jedoch nicht weiter benötigen, sei an dieser Stelle darauf verzichtet.

(iii) In die Definition des Dehnschen Funktional gehen nur die  $(d - 2)$ -dimensionalen Volumina und die Keilwinkelgrößen der (Hyper-)Kanten ein. Die Keilwinkelgrößen sind jedoch invariant unter Ähnlichkeitsabbildungen. Da das  $(d - 2)$ -dimensionale Volumenfunktional homogen vom Grade  $d - 2$  ist, müssen es genauso die Dehnschen Funktionale sein. q.e.d.

**Bemerkung 3.3:** Damit ist  $D_f(P) = D_f(Q)$  eine notwendige Bedingung für die elementare Zerlegungsgleichheit von Polyedern  $P$  und  $Q$ . Uns interessiert jedoch hauptsächlich, ob die Dehnschen Funktionale Minkowski-additiv sind. Eine erste Antwort darauf liefert folgendes auf H. Hadwiger [Ha2] zurück gehendes Lemma:

**Lemma 3.3: (Hadwigersches Lemma)** [Ha2, S. 63f] *Es sei  $\Phi$  ein Polyederfunktional, welches folgende Bedingungen erfüllt:*

$$(\alpha) \quad \bigwedge_{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \bigwedge_{\tau \in \mathcal{T}_d} (\Phi(P) = \Phi(\tau(P))), \quad (\Phi \text{ ist translationsinvariant})$$

$$(\beta) \quad \bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} (\Phi(P \uplus Q) = \Phi(P) + \Phi(Q)), \quad (\Phi \text{ ist einfach additiv})$$

$$(\gamma) \quad \bigwedge_{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \bigwedge_{\lambda \in \mathbb{Q}_+} (\Phi(\lambda \cdot P) = \lambda \cdot \Phi(P)) \quad (\Phi \text{ ist rational-linear}).$$

*Dann ist  $\Phi$  auch Minkowski-additiv:*

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^3)} (\Phi(P \oplus Q) = \Phi(P) + \Phi(Q)).$$

BEWEIS: Da wir an den Stellen, wo wir das Hadwigersche Lemma anwenden können, die Beweise später auf andere Weise führen, sei an dieser Stelle darauf verzichtet und stattdessen auf das Buch von Hadwiger [Ha2] verwiesen. q.e.d.

Das Hadwigersche Lemma liefert uns damit schon eine weitere Antwort bei der Suche nach Minkowski-additiven Funktionalen, denn für  $d = 3$  erfüllen die Dehnschen Funktionale die drei Bedingungen  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  und  $(\gamma)$ .

**Lemma 3.4:** *Für  $d = 3$  ist  $D_f$  Minkowski-additiv:*

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^3)} (D_f(P \oplus Q) = D_f(P) + D_f(Q)).$$

BEWEIS: Der Beweis folgt einerseits aus dem Hadwigerschen Lemma 3.3, da die Dehnschen Funktionale nach Lemma 3.2 für  $d = 3$  die drei Bedingungen  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  und  $(\gamma)$  erfüllen. Andererseits wird später in Lemma 3.11 ein allgemeinerer Satz bewiesen, so dass wir an dieser Stelle darauf verzichten können. q.e.d.

Damit sind die Dehnschen Funktionale eine weitere notwendige Bedingung für die Minkowskische Zerlegungsgleichheit.

**Satz 3.2:** *Für zwei Polyeder  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^3)$  gilt für alle rational-linearen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  mit  $f(\pi) = 0$ :*

$$P \stackrel{z}{=} Q \implies D_f(P) = D_f(Q).$$

Es zeigt sich, dass die Dehnschen Bedingungen für  $d > 3$  keine notwendigen Bedingungen mehr darstellen, denn es gilt folgendes Lemma:

**Lemma 3.5:** *Ist ein Polyederfunktional  $\Phi$  Minkowski-additiv, so ist es auch rational-homogen vom Grade 1.*

BEWEIS: Es sei  $\Phi$  ein Minkowski-additives Polyederfunktional. Sei zunächst  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt wegen Lemma 3.16 aus Abschnitt 3.2 für jedes Polytop  $P$ :

$$n \cdot P = \bigoplus_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot (n \cdot P) = \bigoplus_{i=1}^n P. \quad (3.1)$$

Unter Ausnutzung der Minkowski-Additivität erhalten wir

$$\Phi(n \cdot P) = \Phi\left(\bigoplus_{i=1}^n P\right) = \sum_{i=1}^n \Phi(P) = n \cdot \Phi(P). \quad (3.2)$$

Daraus erhalten wir wiederum für  $m \in \mathbb{N}, m \neq 0$  indem wir  $Q = m \cdot P$  setzen

$$\Phi\left(\frac{1}{m} \cdot Q\right) = \frac{1}{m} \cdot \Phi(Q). \quad (3.3)$$

Aus 3.2 und 3.3 ergibt sich für  $n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$

$$\Phi\left(\frac{n}{m} \cdot P\right) = n \cdot \Phi\left(\frac{1}{m} \cdot P\right) = \frac{n}{m} \cdot \Phi(P).$$

Also ist  $\Phi$  rational-homogen vom Grade 1. q.e.d.

**Bemerkung 3.4:** Da die Dehnschen Funktionale nach Lemma 3.2 (iii) homogen vom Grade  $d - 2$  sind, können sie also für  $d > 3$  nicht rational-homogen vom Grade 1 sein. Damit können sie also auch nicht Minkowski-additiv sein.

### 3.1.3. Die Hadwigerschen Bedingungen

H. Hadwiger hat in [Ha2, S. 49f] eine Verallgemeinerung der Dehnschen Funktionale angegeben. Diese sind wie die Dehnschen Funktionale additiv bzgl. der elementargeometrischen Summe. Es wird sich zeigen, dass einige dieser Funktionale auch Minkowski-additiv sind.

**Definition 3.4:** Es seien  $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}, k = 1, \dots, \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$  rational-lineare Funktionen mit  $f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Für eine Hyperkante  $e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)$  bezeichne  $\alpha(e)$  wiederum die Größe des Keilwinkels zwischen den beiden anliegenden  $(d - 1)$ -dimensionalen Seitenflächen. Mit  $D_{f_1}^d$  bezeichnen wir die gewöhnlichen Dehnschen Funktionale zu  $f_1$ :

$$D_{f_1}^d(P) := \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} V_{d-2}(e) \cdot f_1(\alpha(e))$$

Für  $k = 2, \dots, \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$  definieren wir nun rekursiv:

$$D_{f_1, \dots, f_k}^d(P) := \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} D_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}(e) \cdot f_k(\alpha(e))$$

$D_{f_1, \dots, f_k}^d$  heißt *Hadwigersches Funktional* zu  $f_1, \dots, f_k$ . Ist  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ein uneigentliches Polytop, so setzen wir wieder  $D_{f_1, \dots, f_k}^d(P) := 0$ .

Die Hadwigerschen Funktionale besitzen folgende Eigenschaften:

**Lemma 3.6: (Eigenschaften der Hadwigerschen Funktionale)** [Ha2, S. 50f] Für alle Dimensionen  $d \geq 3$  und alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  ( $n = \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$ ) mit  $f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gilt für  $k = 1, \dots, n$ :

(i)  $D_{f_1, \dots, f_k}^d$  ist bewegungsinvariant:

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( P \cong Q \implies D_{f_1, \dots, f_k}^d(P) = D_{f_1, \dots, f_k}^d(Q) \right),$$

(ii)  $D_{f_1, \dots, f_k}^d$  ist additiv bzgl. der elementargeometrischen Summe:

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( D_{f_1, \dots, f_k}^d(P \uplus Q) = D_{f_1, \dots, f_k}^d(P) + D_{f_1, \dots, f_k}^d(Q) \right),$$

(iii)  $D_{f_1, \dots, f_k}^d$  ist homogen vom Grade  $d - 2k$ :

$$\bigwedge_{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \bigwedge_{\lambda > 0} \left( D_{f_1, \dots, f_k}^d(\lambda \cdot P) = \lambda^{d-2k} \cdot D_{f_1, \dots, f_k}^d(P) \right).$$

BEWEIS: (i) Für  $k = 1$  handelt es sich um die gewöhnlichen Dehnschen Funktionale  $D_{f_1}^d$ . Diese sind nach Lemma 3.2(i) bewegungsinvariant für alle Dimensionen  $d$ . Es seien nun auch die  $D_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}$  bewegungsinvariant für alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_{k-1}$ . Für eine weitere rational-lineare Funktion  $f_k$  ist dann nach Definition 3.4

$$D_{f_1, \dots, f_k}^d(P) = \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} D_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}(e) \cdot f(\alpha(e)).$$

Da die  $D_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}$  bewegungsinvariant sind und dies genauso für die Keilwinkel gilt, ist  $D_{f_1, \dots, f_k}^d$  ebenfalls bewegungsinvariant.

(ii) Der Beweis der Additivität bezüglich der elementargeometrischen Summe ist elementar. Da wir diese Eigenschaft im Folgenden jedoch nicht weiter benötigen, sei an dieser Stelle darauf verzichtet und auf [Ha2] verwiesen.

(iii) Für  $k = 1$  handelt es sich wieder um die gewöhnlichen Dehnschen Funktionale  $D_{f_1}^d$ . Diese sind nach Lemma 3.2 (iii) homogen vom Grade  $d - 2$  für alle Dimensionen  $d$ . Es seien nun die  $D_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}$  homogen vom Grade  $(d - 2) - 2(k - 1) = d - 2k$  für alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_{k-1}$ . Für eine weitere rational-lineare Funktion  $f_k$  ist dann nach Definition 3.4

$$D_{f_1, \dots, f_k}^d(P) = \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} D_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}(e) \cdot f(\alpha(e)).$$

Die Keilwinkelgrößen sind jedoch invariant unter Ähnlichkeitsabbildungen. Da die  $D_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}$  homogen vom Grade  $d - 2k$  sind, muss dies auch für  $D_{f_1, \dots, f_k}^d$  gelten.  
q.e.d.

**Bemerkung 3.5:** Damit ist  $D_{f_1, \dots, f_k}^d(P) = D_{f_1, \dots, f_k}^d(Q)$  eine notwendige Bedingung für die elementare Zerlegungsgleichheit von Polyedern  $P$  und  $Q$ . Für uns interessant ist jedoch die Tatsache, dass einige der Hadwigerschen Funktionale ebenfalls Minkowski-additiv sind.

**Lemma 3.7:** Für ungerade Dimensionen  $d$  ( $d \geq 3$ ) ist  $D_{f_1, \dots, f_n}^d$  ( $n = \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1 = \frac{d-1}{2}$ ) Minkowski-additiv:

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( D_{f_1, \dots, f_n}^d(P \oplus Q) = D_{f_1, \dots, f_n}^d(P) + D_{f_1, \dots, f_n}^d(Q) \right).$$

BEWEIS: Da  $d$  ungerade ist, gilt  $n = \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1 = \frac{d-1}{2}$ . Nach Lemma 3.6 (iii) sind die Hadwigerschen Funktionale  $D_{f_1, \dots, f_n}^d$  homogen vom Grade  $d - 2n = d - 2 \cdot \frac{d-1}{2} = 1$ . Außerdem sind diese Funktionale nach Lemma 3.6 (i) und (ii) bewegungsinvariant und einfach additiv. Sie erfüllen demnach die Voraussetzungen für das Hadwigersche Lemma 3.3. Daher sind sie auch Minkowski-additiv. Wir werden später jedoch sehen, dass dieses Lemma nur ein Spezialfall von Lemma 3.11 ist. q.e.d.

Damit sind diese speziellen Hadwigerschen Funktionale eine weitere notwendige Bedingung für die Minkowskische Zerlegungsgleichheit.

**Satz 3.3:** Für zwei Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  in Räumen ungerader Dimension gilt für alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  ( $n = \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1 = \frac{d-1}{2}$ ) mit  $f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$P \stackrel{z}{=} Q \implies D_{f_1, \dots, f_n}^d(P) = D_{f_1, \dots, f_n}^d(Q).$$

**Bemerkung 3.6:** Alle anderen Hadwigerschen Funktionale sind homogen von höherem als ersten Grade. Nach Lemma 3.6 (iii) sind die  $D_{f_1, \dots, f_k}^d$  mit  $k \leq \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$  homogen vom Grade  $d - 2k$ . So gilt in geraden Dimensionen  $d - 2k \geq d - 2(\lceil \frac{d}{2} \rceil - 1) = d - 2(\frac{d}{2} - 1) = 2$ . Ebenso gilt in ungeraden Dimensionen für diejenigen Funktionale  $D_{f_1, \dots, f_k}^d$  mit  $k < \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1 = \frac{d-1}{2}$ , dass der Homogenitätsgrad  $d - 2k > d - 2(\frac{d-1}{2}) = 1$  ist. Damit können sie auch nicht rational-homogen vom Grade 1 sein. Deshalb sind sie nach Lemma 3.5 nicht Minkowski-additiv.

### 3.1.4. Weitere notwendige Bedingungen in höheren Dimensionen

Dass die Hadwigerschen Funktionale nur für ungerade Dimensionen eine notwendige Bedingung für die Minkowskische Zerlegungsgleichheit liefern, wirft natürlich sofort die Frage auf, wie sich die Situation in Räumen gerader Dimension darstellt. Auch hier wird man wohl, zusätzlich zur mittleren Breite, mit weiteren notwendigen Bedingungen rechnen müssen. Außerdem blieb selbst in ungeraden Dimensionen von der Vielzahl der Hadwigerschen Funktionale jeweils nur eins übrig, das Minkowski-additiv ist. Man wird

doch auch in diesem Falle, gerade in höheren Dimensionen, mit weiteren notwendigen Bedingungen rechnen müssen. Dazu werden hier zwei Konstruktionsverfahren vorgestellt, mit denen man aus bekannten Minkowski-additiven Funktionalen neue gewinnen kann. Das erste Verfahren ist an die Konstruktion der Dehnschen Funktionale angelehnt.

**Definition 3.5:** Es sei  $\Phi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^{d-2}) \rightarrow \mathbb{R}$  ein bewegungsinvariantes Polyederfunktional. Weiter sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  eine rational-lineare Funktion mit  $f(\pi) = 0$ . Für eine Hyperkante  $F \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)$  bezeichne  $\alpha(F)$  wiederum den Keilwinkel zwischen den beiden anliegenden  $(d-1)$ -dimensionalen Seitenflächen. Dann definieren wir ein Funktional  $\Xi_f^\Phi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  indem wir für ein eigentliches Polytop  $P \in \mathfrak{P}_d$

$$\Xi_f^\Phi(P) := \sum_{F \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} \Phi(F) \cdot f(\alpha(F))$$

setzen. Ist  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ein uneigentliches Polytop, so setzen wir  $\Xi_f^\Phi(P) := 0$ .

Direkt aus der Definition ergeben sich einige wichtige Eigenschaften dieser Funktionale.

**Lemma 3.8:** (i)  $\Xi_f^\Phi$  ist ein bewegungsinvariantes Funktional.

(ii) Ist  $\Phi$  homogen vom Grade  $k$ , so ist auch  $\Xi_f^\Phi$  homogen vom Grade  $k$ .

Für unsere Untersuchungen ist es wichtig festzustellen, unter welchen Bedingungen die Funktionale  $\Xi_f^\Phi$  Minkowski-additiv sind.

**Lemma 3.9:** Es sei  $\Phi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^{d-2}) \rightarrow \mathbb{R}$  ein Minkowski-additives Polyederfunktional, welches für uneigentliche Polytope verschwindet. Weiter sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  wieder eine rational-lineare Funktion mit  $f(\pi) = 0$ .

Dann ist  $\Xi_f^\Phi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  ein Minkowski-additives Polyederfunktional, welches ebenfalls für uneigentliche Polytope verschwindet.

**BEWEIS:** Es seien nun  $A, B, C \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  drei Polytope mit  $A \oplus B = C$ . Ist  $C$  ein uneigentliches Polytop, so müssen  $A$  und  $B$  ebenfalls uneigentlich sein. Dann gilt natürlich  $\Xi_f^\Phi(C) = 0 = \Xi_f^\Phi(A) + \Xi_f^\Phi(B)$ .

Sei also  $C$  ein eigentliches Polytop.  $A$  und  $B$  können aber trotzdem uneigentlich sein. Die zentrale Idee dieses Beweises besteht darin, das Funktional  $\Xi_f^\Phi$  durch Projektionen auf zweidimensionale Unterräume zu berechnen.

Als Beispiel betrachten wir die in Definition 3.3 auf Seite 23 eingeführten Dehnschen Funktionale für den dreidimensionalen Raum  $\mathbb{E}^3$ . Für ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^3)$  war dieses definiert als

$$D_f(P) := \sum_{F \in \mathfrak{F}_1(P)} V_1(F) \cdot f(\alpha(F)).$$

Ist  $U$  eine Gerade durch den Ursprung und  $\Pi_U : \mathbb{E}^3 \rightarrow U^\perp$  die Orthogonalprojektion auf die Ebene  $U^\perp$ , dann können wir für jede Kante  $F$  von  $P$ , die parallel zu  $U$  ist, den Keilwinkel sehr leicht aus dem Bild von  $P$  unter der Projektion  $\Pi_U$

bestimmen. In diesem Fall ist  $F' := \Pi_U(F)$  eine Ecke des Polygons  $P' := \Pi_U(P)$  und  $\alpha(F)$  ist gleich dem Innenwinkel der Ecke  $F'$ .

Ist umgekehrt  $G'$  irgendeine Ecke von  $P'$ , so ist  $G'$  entweder das Bild einer Kante von  $P$ , die parallel zu  $U$  ist oder einer Ecke von  $P$ . Setzen wir  $G := \Pi_U^{-1}(G') \cap P$ , so gilt demnach  $G \in \mathfrak{F}_1(P)$  oder  $G \in \mathfrak{F}_0(P)$ . Ist  $G$  eine Ecke von  $P$ , so ist  $V_1(G) = 0$  und wir machen keinen Fehler, wenn wir zu folgender Darstellung von  $D_f$  übergehen:

$$D_f(P) = \sum_U \sum_{F' \in \mathfrak{F}_0(\Pi_U(P))} V_1(\Pi_U^{-1}(F') \cap P) \cdot f(\alpha(F')).$$

Die Summation ist dabei über alle Geraden  $U$  durch den Ursprung zu führen, die eine parallele Kante von  $P$  besitzen. Wir definieren nun für jede Gerade  $U$ , die durch den Ursprung geht

$$D_f^U(P) := \sum_{F' \in \mathfrak{F}_0(\Pi_U(P))} V_1(\Pi_U^{-1}(F') \cap P) \cdot f(\alpha(F')).$$

Dann können wir uns darauf beschränken, die Minkowski-Additivität von  $D_f^U$  zu zeigen. Im allgemeinen Fall entspricht dabei  $D_f^U$  dem Funktional  $\Psi_U$ , das im Folgenden eingeführt wird.

Für einen  $k$ -dimensionalen affinen Unterraum  $\mathbb{A}_k$  des  $\mathbb{E}^d$  bezeichne  $V(\mathbb{A}_k)$  den zugehörigen linearen Unterraum. Für ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ist dann  $\mathfrak{U}_{d-2}(P) := \{U : U = V(\text{aff } F), F \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)\}$  die Menge aller  $(d-2)$ -dimensionalen linearen Unterräume, die parallel zu einer  $(d-2)$ -dimensionalen Seite von  $P$  sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \Xi_f^\Phi(P) &= \sum_{F \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} \Phi(F) \cdot f(\alpha(F)) \\ &= \sum_{U \in \mathfrak{U}_{d-2}(P)} \sum_{\substack{F \in \mathfrak{F}_{d-2}(P) \\ F \parallel U}} \Phi(F) \cdot f(\alpha(F)) \\ &= \sum_{U \in \mathfrak{U}_{d-2}(P)} \Psi_U(P), \quad \text{wobei} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\Psi_U(P) := \sum_{\substack{F \in \mathfrak{F}_{d-2}(P) \\ F \parallel U}} \Phi(F) \cdot f(\alpha(F)) \quad \text{ist.} \tag{3.5}$$

Jetzt fixieren wir einen linearen Unterraum  $U \in \mathfrak{U}_{d-2}(C)$ . Dann ist das orthogonale Komplement  $U^\perp := \{y : \langle x, y \rangle = 0 \text{ für alle } x \in U\}$  ein zweidimensionaler Unterraum des  $\mathbb{E}^d$ , also eine Ebene. Auf dieser werde eine Orientierung festgelegt. Mit  $\Pi_U : \mathbb{E}^d \rightarrow U^\perp$  bezeichnen wir die Orthogonalprojektion auf  $U^\perp$ . Dann sind  $A' := \Pi_U(A)$ ,  $B' := \Pi_U(B)$  und  $C' := \Pi_U(C)$  Polygone. Dabei gilt dann wegen Lemma 2.4, dass  $C' = A' \oplus B'$ . Dabei können  $A'$  oder  $B'$  durchaus zu einem Punkt oder einer Strecke ausgeartet sein. Den Fall, dass eines der beiden Polygone zu einem einzelnen Punkt ausgeartet ist, wollen wir vorläufig ausschließen. Hingegen werden wir den zweiten Fall in unsere Betrachtungen

mit einschließen, indem dann  $A'$  oder  $B'$  als „Zweieck“ aufgefasst werden.  $C'$  ist in jedem Fall ein Polygon mit mindestens drei Ecken. Es sei also  $A'$  ein  $n$ -Eck,  $B'$  ein  $m$ -Eck und  $C'$  ein  $p$ -Eck. Dann gilt für die Eckenzahl von  $C'$ :  $p \leq n + m$ .

Die Eckpunkte von  $A'$  bezeichnen wir mit  $A'_1, \dots, A'_n$ , wobei die Nummerierung in positivem Umlaufsinn erfolgen soll und zyklisch zu verstehen ist, wir also entsprechend  $A'_n = A'_0$ ,  $A'_{n+1} = A'_1$  usw. setzen. Dies werden wir bei den folgenden Bezeichnungen ebenso handhaben. Mit  $A_i := \Pi_U^{-1}(A'_i) \cap A$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sind jeweils Seiten von  $A$  definiert, für die gilt  $A'_i = \Pi_U(A_i)$ . Allerdings können sie auch niederdimensional ( $\dim A_i < d - 2$ ) sein. Mit  $a'_i := \overline{A'_i A'_{i+1}} = \text{conv}(A'_i, A'_{i+1})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) bezeichnen wir die Seiten von  $A'$ . Die zugehörigen Seitenvektoren seien  $\vec{a}_i := A'_{i+1} - A'_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Für diese gilt dann  $\sum_{i=1}^n \vec{a}_i = o$ . Die Menge dieser Seitenvektoren werde mit  $S(A') := \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$  bezeichnet. Schließlich sei für eine Seite  $a'_i$  von  $A'$  der äußere Normaleneinheitsvektor (innerhalb der Ebene  $U^\perp$ ) mit  $\hat{a}_i$  bezeichnet. Die Menge dieser Normaleneinheitsvektoren sei  $N(A') := \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\}$ .

Analoge Bezeichnungen führen wir für die Polytope  $B$  und  $C$  ein. Diese seien hier noch einmal übersichtlich zusammengestellt:

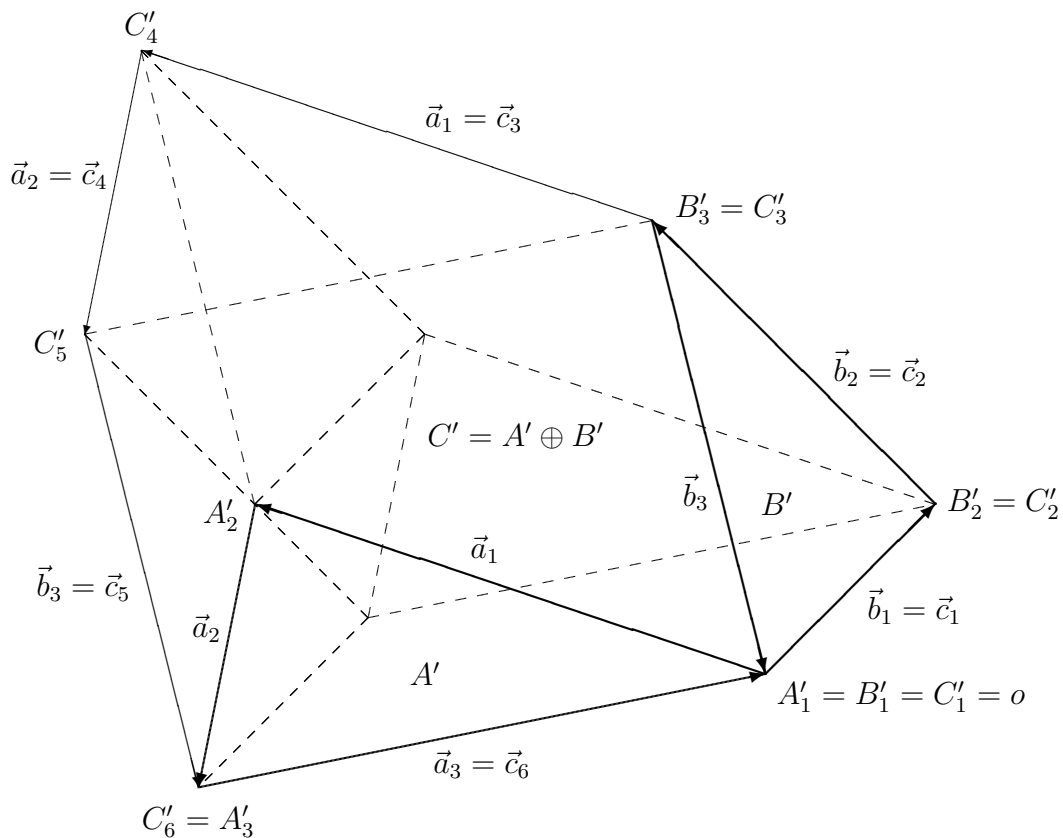
$A' := \Pi_U(A)$	Bild von $A$ unter der Projektion $\Pi_U$ auf $U^\perp$ ,
$A'_1, \dots, A'_n$	Ecken von $A'$ im positiven Umlaufsinn,
$A_i := \Pi_U^{-1}(A'_i) \cap A$	die zu $A'_i$ gehörenden Seite von $A$ ,
$a'_i := \overline{A'_i A'_{i+1}}$	Seiten von $A'$ ,
$\vec{a}_i := A'_{i+1} - A'_i$	die Seitenvektoren von $A'$ ,
$S(A') := \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$	Menge der Seitenvektoren von $A'$ ,
$\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n$	die Normaleneinheitsvektoren der Seiten $a'_1, \dots, a'_n$ ,
$N(A') := \{\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n\}$	Menge der Normaleneinheitsvektoren von $A'$ ,
$B' := \Pi_U(B)$	Bild von $B$ unter der Projektion $\Pi_U$ auf $U^\perp$ ,
$B'_1, \dots, B'_m$	Ecken von $B'$ im positiven Umlaufsinn,
$B_i := \Pi_U^{-1}(B'_i) \cap B$	die zu $B'_i$ gehörenden Seite von $B$ ,
$b'_i := \overline{B'_i B'_{i+1}}$	Seiten von $B'$ ,
$\vec{b}_i := B'_{i+1} - B'_i$	die Seitenvektoren von $B'$ ,
$S(B') := \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$	Menge der Seitenvektoren von $B'$ ,
$\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m$	die Normaleneinheitsvektoren der Seiten $b'_1, \dots, b'_m$ ,
$N(B') := \{\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m\}$	Menge der Normaleneinheitsvektoren von $B'$ ,
$C' := \Pi_U(C)$	Bild von $C$ unter der Projektion $\Pi_U$ auf $U^\perp$ ,
$C'_1, \dots, C'_p$	Ecken von $C'$ im positiven Umlaufsinn,



$$N(C') := \{\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_p\} \quad \text{Menge der Normaleneinheitsvektoren von } C'.$$

Die Nummerierung soll dabei so erfolgen, dass  $C'_1 = A'_1 + B'_1$  gilt. Dies ist stets möglich, da es nach Lemma 2.2 (iii) zu jeder Ecke  $C'_k \in \mathfrak{F}_0(C')$  auch Ecken  $A'_i \in \mathfrak{F}_0(A')$  und  $B'_j \in \mathfrak{F}_0(B')$  gibt, mit  $C'_k = A'_i + B'_j$ .

Zur Erläuterung schauen wir uns ein Beispiel im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{E}^3$  an.  $C$  sei die Minkowskisumme zweier Tetraeder  $A$  und  $B$ . Jedes der beiden Tetraeder soll dabei eine Kante besitzen, die zu dem eindimensionalen Unterraum  $U$  parallel liegt. Die Projektion  $\Pi_U$  von  $A$  und  $B$  auf den zweidimensionalen Unterraum  $U^\perp$  sind dann die beiden Dreiecke  $A' = \Pi_U(A)$  und  $B' = \Pi_U(B)$ .  $C' = \Pi_U(C) = A' \oplus B'$  ist dann ein (eventuell entartetes) Sechseck. Wir wollen weiter annehmen, dass  $C'$  nicht zu einem Drei-, Vier- oder Fünfeck ausgeartet ist. In Abbildung 1 sind jeweils



**Abbildung 1:** Projektion von  $A, B$  und  $C$  in die Ebene  $U^\perp$

die Bilder der Projektionen von  $A, B$  und  $C$  in den Unterraum  $U^\perp$  dargestellt. O.B.d.A. sei dabei angenommen, dass die Ecken  $A'_1, B'_1$  und  $C'_1$  im Ursprung liegen. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir nun folgende Darstellungen von  $D_f^U(A), D_f^U(B)$  und  $D_f^U(C)$ :

$$D_f^U(A) = \sum_{i=1}^3 V_1(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})), \quad (3.6)$$

$$D_f^U(B) = \sum_{i=1}^3 V_1(B_i) \cdot f(\angle(\vec{b}_i, -\vec{b}_{i-1})), \quad (3.7)$$

$$D_f^U(C) = \sum_{i=1}^6 V_1(C_i) \cdot f(\angle(\vec{c}_i, -\vec{c}_{i-1})). \quad (3.8)$$

Wie man der Abbildung 1 entnehmen kann, gelten für die Seitenvektoren von  $A', B'$  und  $C'$  die Beziehungen:

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1, \quad \vec{c}_2 = \vec{b}_2, \quad \vec{c}_3 = \vec{a}_1, \quad \vec{c}_4 = \vec{a}_2, \quad \vec{c}_5 = \vec{b}_3, \quad \vec{c}_6 = \vec{a}_3.$$

Außerdem gelten für die Eckpunkte von  $C'$  folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} C'_1 &= A'_1 \oplus B'_1, & C'_2 &= A'_1 \oplus B'_2, & C'_3 &= A'_1 \oplus B'_3, \\ C'_4 &= A'_2 \oplus B'_3, & C'_5 &= A'_3 \oplus B'_3, & C'_6 &= A'_3 \oplus B'_1. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 \oplus B_1, & C_2 &= A_1 \oplus B_2, & C_3 &= A_1 \oplus B_3, \\ C_4 &= A_2 \oplus B_3, & C_5 &= A_3 \oplus B_3, & C_6 &= A_3 \oplus B_1. \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden von (3.8) können wir nun folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} V_1(C_1) \cdot f(\angle(\vec{c}_1, -\vec{c}_6)) &= V_1(A_1 \oplus B_1) \cdot f(\angle(\vec{b}_1, -\vec{a}_3)) \\ &= V_1(A_1) \cdot f(\angle(\vec{b}_1, -\vec{a}_3)) + V_1(B_1) \cdot f(\angle(\vec{b}_1, -\vec{a}_3)) \\ V_1(C_2) \cdot f(\angle(\vec{c}_2, -\vec{c}_1)) &= V_1(A_1 \oplus B_2) \cdot f(\angle(\vec{b}_2, -\vec{b}_1)) \\ &= V_1(A_1) \cdot f(\angle(\vec{b}_2, -\vec{b}_1)) + V_1(B_2) \cdot f(\angle(\vec{b}_2, -\vec{b}_1)) \\ V_1(C_3) \cdot f(\angle(\vec{c}_3, -\vec{c}_2)) &= V_1(A_1 \oplus B_3) \cdot f(\angle(\vec{a}_1, -\vec{b}_2)) \\ &= V_1(A_1) \cdot f(\angle(\vec{a}_1, -\vec{b}_2)) + V_1(B_3) \cdot f(\angle(\vec{a}_1, -\vec{b}_2)) \\ V_1(C_4) \cdot f(\angle(\vec{c}_4, -\vec{c}_3)) &= V_1(A_2 \oplus B_3) \cdot f(\angle(\vec{a}_2, -\vec{a}_1)) \\ &= V_1(A_2) \cdot f(\angle(\vec{a}_2, -\vec{a}_1)) + V_1(B_3) \cdot f(\angle(\vec{a}_2, -\vec{a}_1)) \\ V_1(C_5) \cdot f(\angle(\vec{c}_5, -\vec{c}_4)) &= V_1(A_3 \oplus B_3) \cdot f(\angle(\vec{b}_3, -\vec{a}_2)) \\ &= V_1(A_3) \cdot f(\angle(\vec{b}_3, -\vec{a}_2)) + V_1(B_3) \cdot f(\angle(\vec{b}_3, -\vec{a}_2)) \\ V_1(C_6) \cdot f(\angle(\vec{c}_6, -\vec{c}_5)) &= V_1(A_3 \oplus B_1) \cdot f(\angle(\vec{a}_3, -\vec{b}_3)) \\ &= V_1(A_3) \cdot f(\angle(\vec{a}_3, -\vec{b}_3)) + V_1(B_1) \cdot f(\angle(\vec{a}_3, -\vec{b}_3)) \end{aligned}$$

Die Summanden, in denen  $V_1(A_1)$  vorkommt, lassen sich nun wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & V_1(A_1) \cdot f(\angle(\vec{b}_1, -\vec{a}_3)) + V_1(A_1) \cdot f(\angle(\vec{b}_2, -\vec{b}_1)) + V_1(A_1) \cdot f(\angle(\vec{a}_1, -\vec{b}_2)) \\ &= V_1(A_1) \cdot f(\angle(\vec{a}_1, -\vec{a}_3)) \end{aligned}$$

Entsprechend lassen sich auch die Summanden, die  $V_1(A_3), V_1(B_1)$  und  $V_1(B_3)$  enthalten, zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & V_1(A_3) \cdot f(\angle(\vec{b}_3, -\vec{a}_2)) + V_1(A_3) \cdot f(\angle(\vec{a}_3, -\vec{b}_3)) \\ &= V_1(A_3) \cdot f(\angle(\vec{a}_3, -\vec{a}_2)) \\ & V_1(B_1) \cdot f(\angle(\vec{b}_1, -\vec{a}_3)) + V_1(B_1) \cdot f(\angle(\vec{a}_3, -\vec{b}_3)) \\ &= V_1(B_1) \cdot f(\angle(\vec{b}_1, -\vec{b}_3)) \\ & V_1(B_3) \cdot f(\angle(\vec{a}_1, -\vec{b}_2)) + V_1(B_3) \cdot f(\angle(\vec{a}_2, -\vec{a}_1)) + V_1(B_3) \cdot f(\angle(\vec{b}_3, -\vec{a}_2)) \\ &= V_1(B_3) \cdot f(\angle(\vec{b}_3, -\vec{b}_2)) \end{aligned}$$

Fassen wir nun alle Summanden zusammen, so erhalten wir aus (3.8) für  $D_f^U(C)$  folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} D_f^U(C) &= \sum_{i=1}^6 V_1(C_i) \cdot f(\angle(\vec{c}_i, -\vec{c}_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^3 V_1(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) + \sum_{i=1}^3 V_1(B_i) \cdot f(\angle(\vec{b}_i, -\vec{b}_{i-1})) \\ &= D_f^U(A) + D_f^U(B) \end{aligned}$$

Da dies für alle eindimensionalen Unterräume  $U$  gilt, erhalten wir daraus die Behauptung  $D_f(C) = D_f(A) + D_f(B)$ .

Im allgemeinen Fall entspricht  $D_f^U$  das in (3.5) definierte Funktional  $\Psi_U$ . Mit den oben eingeführten Bezeichnungen erhalten wir für  $\Psi_U(C)$  folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \Psi_U(C) &= \sum_{\substack{F \in \mathfrak{F}_{d-2}(C) \\ F \parallel U}} \Phi(F) \cdot f(\alpha(e)) \\ &= \sum_{i=1}^p \Phi(C_i) \cdot f(\angle(\vec{c}_i, -\vec{c}_{i-1})). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Denn ist  $F \in \mathfrak{F}_{d-2}(C)$  eine  $(d-2)$ -dimensionale Seite von  $C$ , die parallel zu  $U$  ist, so ist  $\Pi_U(F)$  eine Ecke von  $C'$ , also eines der  $C'_i$ . Es gilt demnach  $F = C_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Da  $F$  senkrecht auf  $U^\perp$  und damit auch zu  $C'$  steht, können wir den Keilwinkel  $\alpha(F)$  auch im  $p$ -Eck  $C'$  messen. Es gilt dann  $\alpha(F) = \angle(\vec{c}_i, -\vec{c}_{i-1})$ . Ist umgekehrt  $C'_j$  eine Ecke von  $C'$ , so ist  $C_j$  gleichwohl eine Seite von  $C$ . Falls  $C_j$   $(d-2)$ -dimensional ist, so gilt weiterhin  $C_j \in \mathfrak{F}_{d-2}(C)$  und für den Keilwinkel von  $C_j$  gilt wieder  $\alpha(C_j) = \angle(\vec{c}_j, -\vec{c}_{j-1})$ . Ist andererseits  $\dim C_j < d-2$ , so ist nach Voraussetzung

$\Phi(C_j) = 0$ . Somit leistet dieser Summand keinen Beitrag bei der Summenbildung in Gleichung (3.9).

Analog erhalten wir für  $\Psi_U(A)$  und  $\Psi_U(B)$  entsprechende Darstellungen:

$$\Psi_U(A) = \sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) \quad \text{und} \quad (3.10)$$

$$\Psi_U(B) = \sum_{i=1}^m \Phi(B_i) \cdot f(\angle(\vec{b}_i, -\vec{b}_{i-1})). \quad (3.11)$$

Zur Abkürzung führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\Psi_C^k := \Phi(C_k) \cdot f(\angle(\vec{c}_k, -\vec{c}_{k-1})) \quad \text{für } k = 1, \dots, p \quad (3.12)$$

$$\Psi_A^i := \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

$$\Psi_B^j := \Phi(B_j) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{b}_{j-1})) \quad \text{für } j = 1, \dots, m. \quad (3.14)$$

Damit erhalten wir folgende Darstellungen von  $\Psi_U(C)$ ,  $\Psi_U(A)$  und  $\Psi_U(B)$ :

$$\Psi_U(C) = \sum_{k=1}^p \Psi_C^k, \quad \Psi_U(A) = \sum_{i=1}^n \Psi_A^i \quad \text{und} \quad \Psi_U(B) = \sum_{j=1}^m \Psi_B^j. \quad (3.15)$$

Zunächst sei nun weiterhin  $N(A') \cap N(B') = \emptyset$  vorausgesetzt; es gelte demnach für alle Normaleneinheitsvektoren von  $A'$  und  $B'$ , dass  $\hat{a}_i \neq \hat{b}_j$  ist für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, m$ . Offensichtlich gilt in diesem Fall  $p = n + m$ .

In Definition 2.3 (iv) hatten wir die Seite eines Polytops  $P$  in Richtung  $u$  mit  $F_P(u)$  bezeichnet. Nach Lemma 2.2 (iii) gilt nun für eine Seite  $c'_k \in \mathfrak{F}_1(C')$ :

$$c'_k = F_{C'}(\hat{c}_k) = F_{A'}(\hat{c}_k) \oplus F_{B'}(\hat{c}_k).$$

Nach unserer zusätzlichen Voraussetzung kann  $\hat{c}_k$  nicht gleichzeitig Normalenvektor von  $A'$  und  $B'$  sein. Deshalb muss einer der beiden Summanden  $F_{A'}(\hat{c}_k)$  und  $F_{B'}(\hat{c}_k)$  ein Eckpunkt sein. Sei dies  $F_{B'}(\hat{c}_k)$ . Dann ist aber  $F_{A'}(\hat{c}_k)$  nur ein Translat von  $c'_k = F_{C'}(\hat{c}_k)$ . Also ist  $F_{A'}(\hat{c}_k) = a'_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  und damit gilt  $\vec{a}_i = \vec{c}_k$ . Ist umgekehrt  $F_{A'}(\hat{c}_k)$  nur ein Eckpunkt von  $A'$ , so kann  $F_{B'}(\hat{c}_k)$  nur ein Translat von  $c'_k = F_{C'}(\hat{c}_k)$  sein. Damit gibt es wiederum ein  $j \in \{1, \dots, m\}$ , sodass  $F_{B'}(\hat{c}_k) = b'_j$ . Es gilt folglich  $\vec{b}_j = \vec{c}_k$ . Somit ist jeder Seitenvektor von  $C'$  entweder ein Seitenvektor von  $A'$  oder von  $B'$ . Durch analoge Überlegungen erhält man genauso die Umkehrung, sodass wir  $S(C') = S(A') \cup S(B')$  erhalten.

Wir betrachten nun den Fall  $N(A') \cap N(B') \neq \emptyset$ . Sei  $v \in N(A') \cap N(B')$ . Dann gibt es Seiten  $a'_i \in \mathfrak{F}_1(A')$ ,  $b'_j \in \mathfrak{F}_1(B')$  und  $c'_k \in \mathfrak{F}_1(C')$ , sodass  $a'_i = F_{A'}(v)$ ,  $b'_j = F_{B'}(v)$  und  $c'_k = F_{C'}(v)$  gelten. Nach Lemma 2.2 (iii) gilt  $F_{C'}(v) = F_{A'}(v) \oplus F_{B'}(v)$ , also auch  $c'_k = a'_i \oplus b'_j$ . Daraus ergibt sich aber genauso für die zugehörigen Seitenvektoren die entsprechende Beziehung  $\vec{c}_k = \vec{a}_i + \vec{b}_j$ . Jetzt definieren wir einen neuen Punkt  $\tilde{C}'_{k+\frac{1}{2}} := C'_k + a'_i$  und

setzen  $\tilde{c}'_k := \overline{C'_k \tilde{C}'_{k+\frac{1}{2}}}$  und  $\tilde{c}'_{k+\frac{1}{2}} := \overline{\tilde{C}'_{k+\frac{1}{2}} C'_{k+1}}$ . Wir fassen nun das  $p$ -Eck  $C'$  als ein  $(p+1)$ -Eck  $\tilde{C}'$  auf, indem wir zu den Ecken von  $C'$  die ausgeartete Ecke  $\tilde{C}'_{k+\frac{1}{2}}$  hinzunehmen und die Seiten  $c'_k$  durch  $\tilde{c}'_k$  und  $\tilde{c}'_{k+\frac{1}{2}}$  ersetzen. Diese ausgeartete Ecke besitzt dann die Winkelgröße  $\angle(\vec{b}_j, -\vec{a}_i) = \pi$ . Wir definieren weiterhin  $\tilde{C}_{k+\frac{1}{2}} := \Pi_U^{-1}(\tilde{C}'_{k+\frac{1}{2}}) \cap C$  und fassen  $\tilde{C}_{k+\frac{1}{2}}$  als ausgeartete  $(d-2)$ -dimensionale Seite auf. Genauso fassen wir  $\tilde{c}_k := \Pi_U^{-1}(\tilde{c}'_k) \cap C$  und  $\tilde{c}_{k+\frac{1}{2}} := \Pi_U^{-1}(\tilde{c}'_{k+\frac{1}{2}}) \cap C$  als ausgeartete  $(d-1)$ -dimensionale Seiten auf. Für den Keilwinkel gilt dann  $\alpha(\tilde{C}_{k+\frac{1}{2}}) = \angle(\vec{b}_j, -\vec{a}_i) = \pi$ . Schließlich entspreche  $\tilde{C}$  dem Polytop  $C$ , wobei diese ausgearteten Seiten mit zu dem Seitenverband  $\mathfrak{F}(\tilde{C})$  gehören sollen. Durch den Übergang von  $C$  zu  $\tilde{C}$  ändert sich das Funktional  $\Psi_U$  nicht, denn es gilt wegen Gleichung (3.9):

$$\begin{aligned} \Psi_U(\tilde{C}) &= \sum_{l=1}^p \Phi(C_l) \cdot f(\angle(\vec{c}_l, -\vec{c}_{l-1})) + \Phi(\tilde{C}_{k+\frac{1}{2}}) \cdot \underbrace{f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{a}_i))}_{=f(\pi)=0} \\ &= \sum_{l=1}^p \Phi(C_l) \cdot f(\angle(\vec{c}_l, -\vec{c}_{l-1})) \\ &= \Psi_U(C). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Genauso verfahren wir, falls  $N(A') \cap N(B')$  noch weiter gemeinsame Normaleneinheitsvektoren enthält. Zum Schluss benennen wir  $\tilde{C}$  wieder in  $C$  um und nummerieren die Eckpunkte von  $C'$  wieder neu durch. Für alle weiteren Betrachtungen spielt es dann weiter keine Rolle, ob etwa manche der Ecken oder Seiten von  $C'$  bzw.  $C$  ausgeartet sind.

Wir wollen jetzt voraussetzen, dass  $S(C') = S(A') \cup S(B')$  gilt. Nach Lemma 2.2 (iii) gibt es zu jeder Ecke  $C'_k \in \mathfrak{F}_0(C')$  weiterhin Ecken  $A'_i \in \mathfrak{F}_0(A')$  und  $B'_j \in \mathfrak{F}_0(B')$ , mit  $C'_k = A'_i + B'_j$ . Außerdem wurde die Nummerierung so gewählt, dass  $C'_1 = A'_1 + B'_1$  gilt. Damit gilt jedoch auch  $C_k = A_i \oplus B_j$  und  $C_1 = A_1 \oplus B_1$ .

Zwischen  $k, i$  und  $j$  besteht die Beziehung  $k = i + j - 1$ . Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion nach  $k$ . Für  $k = 1$  ist die Beziehung erfüllt, da  $C'_1 = A'_1 + B'_1$  ist. Es gelte nun  $C'_k = A'_i + B'_j$  und  $k = i + j - 1$  für ein  $k \in \{1, \dots, p\}$ . Dann folgt aus der Definition von  $\vec{c}_k := C'_{k+1} - C'_k$ , dass  $C'_{k+1} = C'_k + \vec{c}_k$  ist. Für  $A'$  und  $B'$  erhalten wir analog  $A'_{i+1} = A'_i + \vec{a}_i$  bzw.  $B'_{j+1} = B'_j + \vec{b}_j$ . Es gilt dann entweder  $\vec{c}_k = \vec{a}_i$  oder  $\vec{c}_k = \vec{b}_j$ . Im ersten Fall ist  $C'_{k+1} = C'_k + \vec{c}_k = A'_i + B'_j + \vec{a}_i = A'_{i+1} + B'_j$ . Im zweiten Fall gilt analog  $C'_{k+1} = C'_k + \vec{c}_k = A'_i + B'_j + \vec{b}_j = A'_i + B'_{j+1}$ . Es gilt also  $k + 1 = i + j$ .

Wie findet man nun zu einem gegebenen  $k \in \{1, \dots, p\}$  die passenden  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$ , für die  $C_k = A_i \oplus B_j$  bzw.  $C'_k = A'_i + B'_j$  gilt? Dazu nutzen wir aus, dass jeder Eckpunkt eines (eigentlichen) Polygons eindeutig durch die beiden anliegenden Seiten bestimmt ist. Da  $C$  ein eigentliches Polytop ist, ist auch  $C'$  ein eigentliches Polygon. Damit gilt  $C'_k = c'_{k-1} \cap c'_k$ . Sind  $A'$  bzw.  $B'$  nicht zu einer Strecke entartet, so gilt auch hier  $A'_i = a'_{i-1} \cap a'_i$  bzw.  $B'_j = b'_{j-1} \cap b'_j$ . Jetzt unterscheiden wir vier Fälle:

**1. Fall:**  $\vec{c}_k = \vec{a}_i$  und  $\vec{c}_{k-1} = \vec{b}_{j-1}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$ .  
Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} C'_k &= C'_1 + \sum_{r=1}^{k-1} \vec{c}_r = C'_1 + \sum_{s=1}^{i-1} \vec{a}_s + \sum_{t=1}^{j-1} \vec{b}_t = A'_1 + B'_1 + \sum_{s=1}^{i-1} \vec{a}_s + \sum_{t=1}^{j-1} \vec{b}_t \\ &= A'_i + B'_j. \end{aligned}$$

**2. Fall:**  $\vec{c}_k = \vec{b}_j$  und  $\vec{c}_{k-1} = \vec{a}_{i-1}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$ .  
Dann gilt ganz analog  $C'_k = A'_i + B'_j$ .

**3. Fall:**  $\vec{c}_k = \vec{a}_i$  und  $\vec{c}_{k-1} = \vec{a}_{i-1}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ .  
Dann kann  $A'$  nicht zu einer Strecke ausgeartet sein. Wäre  $A'$  zu einer Strecke ausgeartet, so gilt für den Winkel  $\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1}) = \angle(\vec{c}_k, -\vec{c}_{k-1}) = 0$ . Also wäre auch  $C'$  zu einer Strecke ausgeartet. Damit gilt  $A'_i = a'_{i-1} \cap a'_i$ . Demnach ist  $C'_k = A'_i + B'_j$  mit  $j = k - i - 1$ .

**4. Fall:**  $\vec{c}_k = \vec{b}_j$  und  $\vec{c}_{k-1} = \vec{b}_{j-1}$  für ein  $j \in \{1, \dots, m\}$ .  
Analog zum 3. Fall ergibt sich  $C'_k = A'_i + B'_j$  mit  $i = k - j - 1$ .

Wir wollen nun  $\Psi_C^k$  genauer bestimmen. Dazu unterscheiden wir wieder die obigen vier Fälle:

**1. Fall:**  $\vec{c}_k = \vec{a}_i$  und  $\vec{c}_{k-1} = \vec{b}_{j-1}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

$$\begin{aligned} \Psi_C^k &= \Phi(C_k) \cdot f(\angle(\vec{c}_k, -\vec{c}_{k-1})) \\ &= \Phi(A_i \oplus B_j) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{b}_{j-1})) \\ &= \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{b}_{j-1})) + \Phi(B_j) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{b}_{j-1})) \\ &= \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) + \Phi(A_i) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i-1}, -\vec{b}_{j-1})) \\ &\quad + \Phi(B_j) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{b}_{j-1})) \\ &= \Psi_A^i + \Phi(A_i) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i-1}, -\vec{b}_{j-1})) + \Phi(B_j) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{b}_{j-1})) \end{aligned}$$

**2. Fall:**  $\vec{c}_k = \vec{b}_j$  und  $\vec{c}_{k-1} = \vec{a}_{i-1}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

$$\begin{aligned} \Psi_C^k &= \Phi(C_k) \cdot f(\angle(\vec{c}_k, -\vec{c}_{k-1})) \\ &= \Phi(A_i \oplus B_j) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{a}_{i-1})) \\ &= \Phi(B_j) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{a}_{i-1})) + \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{a}_{i-1})) \\ &= \Phi(B_j) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{b}_{j-1})) + \Phi(B_j) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j-1}, -\vec{a}_{i-1})) \\ &\quad + \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{a}_{i-1})) \\ &= \Psi_B^j + \Phi(B_j) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j-1}, -\vec{a}_{i-1})) + \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{a}_{i-1})) \end{aligned}$$

**3. Fall:**  $\vec{c}_k = \vec{a}_i$  und  $\vec{c}_{k-1} = \vec{a}_{i-1}$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

$$\begin{aligned}\Psi_C^k &= \Phi(C_k) \cdot f(\angle(\vec{c}_k, -\vec{c}_{k-1})) \\ &= \Phi(A_i \oplus B_j) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) \\ &= \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) + \Phi(B_j) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) \\ &= \Psi_A^i + \Phi(B_j) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1}))\end{aligned}$$

**4. Fall:**  $\vec{c}_k = \vec{b}_j$  und  $\vec{c}_{k-1} = \vec{b}_{j-1}$  für ein  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

$$\begin{aligned}\Psi_C^k &= \Phi(C_k) \cdot f(\angle(\vec{c}_k, -\vec{c}_{k-1})) \\ &= \Phi(A_i \oplus B_j) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{b}_{j-1})) \\ &= \Phi(B_j) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{b}_{j-1})) + \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{b}_{j-1})) \\ &= \Psi_B^j + \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{b}_j, -\vec{b}_{j-1}))\end{aligned}$$

Wir betrachten nun das  $p$ -Tupel der Seitenvektoren aus  $S(C')$  (in der natürlichen Reihenfolge). Dann entspricht dem ein gewisses  $(n+m)$ -Tupel der Seitenvektoren aus  $S(A') \cup S(B')$ . O.B.d.A. können wir davon ausgehen, dass die Nummerierung der Ecken so gewählt wurde, dass  $\vec{c}_1 = \vec{a}_1$  und  $\vec{c}_{n+m} = \vec{b}_m$  gilt.

$$(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_{n+m}) = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i_1}, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{j_1}, \vec{a}_{i_1+1}, \dots, \vec{a}_{i_2}, \vec{b}_{j_1+1}, \dots, \vec{a}_{i_{l-1}+1}, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_{j_{l-1}+1}, \dots, \vec{b}_m)$$

Nach jeweils einer bestimmten Anzahl von Vektoren  $\vec{a}_i \in S(A')$  kommt demzufolge eine gewisse Anzahl von Vektoren  $\vec{b}_j \in S(B')$ . Wir wollen annehmen, dass es jeweils  $l$  solcher Blöcke aufeinander folgender Vektoren aus  $S(A')$  bzw.  $S(B')$  gibt.

Wir greifen uns nun den  $h$ -ten Block mit Vektoren  $\vec{a}_{i_{h-1}+1}, \dots, \vec{a}_{i_h}$  aus  $S(A')$  heraus und untersuchen die Summe  $\sum \Psi_C^k$  über  $k = j_{h-1} + i_{h-1} + 1, \dots, j_{h-1} + i_h$ . Für  $h = 1$  ist dabei  $j_0 := i_0 := 0$  zu setzen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die einzelnen Summanden in Tabellenform aufgeschlüsselt.

$$\Sigma_A^h := \sum_{k=j_{h-1}+i_{h-1}+1}^{j_{h-1}+i_h} \Psi_C^k =$$

	$k$	$\vec{c}_{k-1}, \vec{c}_k$	Fall
$\Psi_A^{i_{h-1}+1} + \Phi(A_{i_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_{h-1}}, -\vec{b}_{j_{h-1}}))$	$j_{h-1} + i_{h-1} + 1$	$\vec{b}_{j_{h-1}}, \vec{a}_{i_{h-1}+1}$	1
$+ \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(\vec{a}_{i_{h-1}+1}, -\vec{b}_{j_{h-1}})) +$			
$\Psi_A^{i_{h-1}+2} + \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(\vec{a}_{i_{h-1}+2}, -\vec{a}_{i_{h-1}+1})) +$	$j_{h-1} + i_{h-1} + 2$	$\vec{a}_{i_{h-1}+1}, \vec{a}_{i_{h-1}+2}$	3
$\Psi_A^{i_{h-1}+3} + \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(\vec{a}_{i_{h-1}+3}, -\vec{a}_{i_{h-1}+2})) +$	$j_{h-1} + i_{h-1} + 3$	$\vec{a}_{i_{h-1}+2}, \vec{a}_{i_{h-1}+3}$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\Psi_A^{i_h} + \underbrace{\Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(\vec{a}_{i_h}, -\vec{a}_{i_{h-1}}))}_{(*) \text{ (ohne 1. Zeile)}}$	$j_{h-1} + i_h$	$\vec{a}_{i_{h-1}}, \vec{a}_{i_h}$	3

Da  $f$  additiv ist, können alle Summanden, die  $\Phi(B_{j_{h-1}+1})$  enthalten, zusammengefasst werden. Dazu addieren wir  $\Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h}))$  und ziehen es gleich wieder ab. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(*) &= \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(\vec{a}_{i_{h-1}+1}, -\vec{b}_{j_{h-1}})) + \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(\vec{a}_{i_{h-1}+2}, -\vec{a}_{i_{h-1}+1})) \\
&\quad + \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(\vec{a}_{i_{h-1}+3}, -\vec{a}_{i_{h-1}+2})) + \cdots + \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(\vec{a}_{i_h}, -\vec{a}_{i_h-1})) \\
&\quad + \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})) - \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})) \\
&= \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(\vec{a}_{i_{h-1}+1}, -\vec{b}_{j_{h-1}}) + \angle(\vec{a}_{i_{h-1}+2}, -\vec{a}_{i_{h-1}+1}) \\
&\quad + \angle(\vec{a}_{i_{h-1}+3}, -\vec{a}_{i_{h-1}+2}) + \cdots + \angle(\vec{a}_{i_h}, -\vec{a}_{i_h-1}) + \angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})) \\
&\quad - \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})).
\end{aligned}$$

Nun bilden die Vektoren  $\vec{b}_{j_{h-1}}, \vec{a}_{i_{h-1}+1}, \vec{a}_{i_{h-1}+2}, \dots, \vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_{h-1}}$  und  $v := -\sum_{i=i_{h-1}+1}^{i_h} \vec{a}_i$  die  $i_h - i_{h-1} + 3$  Seitenvektoren eines  $(i_h - i_{h-1} + 3)$ -Ecks  $P$ . Die Innenwinkel von  $P$  sind die oben betrachteten Winkel  $\angle(\vec{a}_{i_{h-1}+1}, -\vec{b}_{j_{h-1}}), \angle(\vec{a}_{i_{h-1}+2}, -\vec{a}_{i_{h-1}+1}), \dots, \angle(\vec{a}_{i_h}, -\vec{a}_{i_h-1}), \angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})$ . Dazu kommen noch die beiden Innenwinkel  $\angle(\vec{v}, \vec{b}_{j_{h-1}})$  und  $\angle(\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{v})$ . Diese ergänzen sich zu  $\pi$ . Da die Innenwinkelsumme in einem  $(i_h - i_{h-1} + 3)$ -Eck  $(i_h - i_{h-1} + 1)\pi$  ist, ist die Summe der anderen Winkel gleich  $(i_h - i_{h-1})\pi$ . Wir erhalten demnach

$$\begin{aligned}
(*) &= \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot \underbrace{f((i_h - i_{h-1})\pi)}_{=0} - \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})) \\
&= -\Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})).
\end{aligned}$$

Für  $\Sigma_A^h$  ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\Sigma_A^h &= \sum_{k=j_{h-1}+i_{h-1}+1}^{j_{h-1}+i_h} \Psi_C^k \\
&= \sum_{i=i_{h-1}+1}^{i_h} \Psi_A^i + \Phi(A_{i_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_{h-1}}, -\vec{b}_{j_{h-1}})) \\
&\quad - \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})).
\end{aligned}$$

Nun greifen wir genauso den  $h$ -ten Block mit Vektoren  $\vec{b}_{j_{h-1}+1}, \dots, \vec{b}_{j_h}$  aus  $S(B')$  heraus und untersuchen wiederum die Summe  $\sum \Psi_C^k$  über  $k = i_{h-1} + j_{h-1} + 1, \dots, i_{h-1} + j_h$ . Für  $h = 1$  setzen wir dabei wieder  $j_0 := i_0 := 0$ . Die einzelnen Summanden werden ebenfalls in Tabellenform aufgeschlüsselt.



$$\Sigma_B^h := \sum_{k=i_{h-1}+j_{h-1}+1}^{i_{h-1}+j_h} \Psi_C^k =$$

	$k$	$\vec{c}_{k-1}, \vec{c}_k$	Fall
$\Psi_B^{j_{h-1}+1} + \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h}))$	$i_{h-1}+j_{h-1}+1$	$\vec{a}_{i_h}, \vec{b}_{j_{h-1}+1}$	2
$+ \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(\vec{b}_{j_{h-1}+1}, -\vec{a}_{i_h})) +$			
$\Psi_B^{j_{h-1}+2} + \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(\vec{b}_{j_{h-1}+2}, -\vec{b}_{j_{h-1}+1})) +$	$i_{h-1}+j_{h-1}+2$	$\vec{b}_{j_{h-1}+1}, \vec{b}_{j_{h-1}+2}$	4
$\Psi_B^{j_{h-1}+3} + \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(\vec{b}_{j_{h-1}+3}, -\vec{b}_{j_{h-1}+2})) +$	$i_{h-1}+j_{h-1}+3$	$\vec{b}_{j_{h-1}+2}, \vec{b}_{j_{h-1}+3}$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\Psi_B^{j_h} + \underbrace{\Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(\vec{b}_{j_h}, -\vec{b}_{j_{h-1}}))}_{(*) \text{ (ohne 1. Zeile)}}$	$i_{h-1}+j_h$	$\vec{b}_{j_h-1}, \vec{b}_{j_h}$	4

Jetzt können wir alle Summanden, die  $\Phi(A_{i_h+1})$  enthalten, zusammenfassen. Dazu addieren wir  $\Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h}))$  und ziehen es sogleich wieder ab. Zusammen mit entsprechenden Winkelbetrachtungen wie oben ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
(*) &= \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(\vec{b}_{j_{h-1}+1}, -\vec{a}_{i_h})) + \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(\vec{b}_{j_{h-1}+2}, -\vec{b}_{j_{h-1}+1})) \\
&\quad + \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(\vec{b}_{j_{h-1}+3}, -\vec{b}_{j_{h-1}+2})) + \cdots + \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(\vec{b}_{j_h}, -\vec{b}_{j_{h-1}})) \\
&\quad + \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h})) - \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h})) \\
&= \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(\vec{b}_{j_{h-1}+1}, -\vec{a}_{i_h}) + \angle(\vec{b}_{j_{h-1}+2}, -\vec{b}_{j_{h-1}+1}) \\
&\quad + \angle(\vec{b}_{j_{h-1}+3}, -\vec{b}_{j_{h-1}+2}) + \cdots + \angle(\vec{b}_{j_h}, -\vec{b}_{j_{h-1}}) + \angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h})) \\
&\quad - \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h})). \\
&= \Phi(A_{i_h+1}) \cdot \underbrace{f((j_h - j_{h-1})\pi)}_{=0} - \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h})) \\
&= -\Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h})).
\end{aligned}$$

Für  $\Sigma_B^h$  erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\Sigma_B^h &= \sum_{k=i_h+j_{h-1}+1}^{i_h+j_h} \Psi_C^k \\
&= \sum_{j=j_{h-1}+1}^{j_h} \Psi_B^j + \Phi(B_{i_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})) \\
&\quad - \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h})).
\end{aligned}$$

Für  $\Psi_U(C)$  erhalten wir nun folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\Psi_U(C) &= \sum_{k=1}^p \Psi_C^k = \sum_{h=1}^l (\Sigma_A^h + \Sigma_B^h) \\
&= \sum_{h=1}^l \left( \sum_{i=i_{h-1}+1}^{i_h} \Psi_A^i + \Phi(A_{i_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_{h-1}}, -\vec{b}_{j_{h-1}})) \right. \\
&\quad \left. - \Phi(B_{j_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=j_{h-1}+1}^{j_h} \Psi_B^j + \Phi(B_{i_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{b}_{j_{h-1}}, -\vec{a}_{i_h})) \right. \\
&\quad \left. - \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h})) \right) \\
&= \Psi_U(A) + \Psi_U(B) + \sum_{h=1}^l \left( \Phi(A_{i_{h-1}+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_{h-1}}, -\vec{b}_{j_{h-1}})) \right) \\
&\quad - \sum_{h=1}^l \left( \Phi(A_{i_h+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_{i_h}, -\vec{b}_{j_h})) \right)
\end{aligned}$$

Durch eine Indexverschiebung heben sich fast alle Summanden gegenseitig auf. Beachtet man weiter, dass  $i_0 = j_0 = 0$  festgelegt wurde und außerdem  $i_l = n$  und  $j_l = m$  ist, so erhält man

$$\begin{aligned}
\Psi_U(C) &= \Psi_U(A) + \Psi_U(B) + \Phi(A_1) \cdot f(\angle(-\vec{a}_0, -\vec{b}_0)) \\
&\quad - \Phi(A_{n+1}) \cdot f(\angle(-\vec{a}_n, -\vec{b}_m))
\end{aligned}$$

Da wir die Indizierung zyklisch betrachten, ist  $A_{n+1} = A_1$ ,  $\vec{a}_n = \vec{a}_0$  sowie  $\vec{b}_m = \vec{b}_0$ , und wir erhalten

$$\Psi_U(C) = \Psi_U(A) + \Psi_U(B).$$

Wir wollen jetzt noch den Fall behandeln, der am Anfang ausgeschlossen wurde; dass eines der beiden Polygone  $A'$  oder  $B'$  zu einem Punkt ausgeartet ist. O.B.d.A. nehmen wir an,  $B'$  sei zu einem Punkt ausgeartet. Dann muss  $A'$  ein eigentliches Polygon sein, denn sonst wäre  $C'$  ein uneigentliches Polygon und damit wäre ebenso  $C$  uneigentlich. Dieser triviale Fall wurde ganz am Anfang behandelt.

Wenn  $B'$  nur ein einzelner Punkt ist, dann ist  $C'$  nur ein Translat von  $A'$  und die Seitenvektoren von  $C'$  stimmen mit denen von  $A'$  überein. Für die Eckpunkte von  $C'$  und  $A'$  gilt dann  $C'_i = A'_i + B'$  für alle  $i = 1, \dots, n(=p)$ . Entsprechend gilt somit für die zugehörigen Seiten  $C_i = A_i + B$  für alle  $i = 1, \dots, n(=p)$ . Damit erhalten wir für  $\Psi_U(C)$  mit der Darstellung (3.9):

$$\begin{aligned}
\Psi_U(C) &= \sum_{i=1}^n \Phi(C_i) \cdot f(\angle(\vec{c}_i, -\vec{c}_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^n \Phi(A_i \oplus B) \cdot f(\angle(\vec{c}_i, -\vec{c}_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) + \Phi(B) \sum_{i=1}^n f(\angle(\vec{c}_i, -\vec{c}_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) + \Phi(B) f\left(\sum_{i=1}^n \angle(\vec{c}_i, -\vec{c}_{i-1})\right)
\end{aligned}$$

Da die Winkel  $\angle(\vec{c}_1, -\vec{c}_0), \dots, \angle(\vec{c}_n, -\vec{c}_{n-1})$  gerade die Innenwinkel des  $n$ -Ecks  $C'$  sind, ist die Winkelsumme gleich  $(n-2)\pi$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Psi_U(C) &= \sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) + \Phi(B) \underbrace{f((n-2)\pi)}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^n \Phi(A_i) \cdot f(\angle(\vec{a}_i, -\vec{a}_{i-1})) \\
&= \Psi_U(A).
\end{aligned}$$

Da  $B$  uneigentlich ist, gilt  $\Psi_U(B) = 0$ . Damit erhalten wir in diesem Fall ebenfalls  $\Psi_U(C) = \Psi_U(A) + \Psi_U(B)$ .

Insgesamt erhalten wir mit Darstellung (3.4):

$$\begin{aligned}
\Xi_f^\Phi(C) &= \sum_{U \in \mathfrak{U}_{d-2}(C)} \Psi_U(C), \\
&= \sum_{U \in \mathfrak{U}_{d-2}(C)} \Psi_U(A) + \sum_{U \in \mathfrak{U}_{d-2}(C)} \Psi_U(B).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ist nun einerseits  $U \in \mathfrak{U}_{d-2}(C)$ , aber  $U \notin \mathfrak{U}_{d-2}(A)$ , so gibt es offensichtlich keine  $(d-2)$ -dimensionale Seite von  $A$ , die parallel zu  $U$  ist. Dann ist nach (3.5)  $\Psi_U(A) = 0$ .

Ist andererseits  $U \in \mathfrak{U}_{d-2}(A)$ , so gibt es eine  $(d-2)$ -dimensionale Seite  $E \in \mathfrak{F}_{d-2}(A)$  von  $A$ , die parallel zu  $U$  ist. Dann gibt es einen Normaleneinheitsvektor  $u \in U^\perp$  für den  $E = F_A(u)$  gilt. Da  $\dim U^\perp = 2$  ist, gibt es sogar unendlich viele Einheitsvektoren, die das erfüllen. Davon sei einer so gewählt, dass  $\dim F_B(u) < d-1$  ist. Dies ist immer möglich, da der (äußere) Normaleneinheitsvektor einer  $(d-1)$ -dimensionalen Seite eindeutig bestimmt ist und es nur endlich viele solcher Seiten gibt. Dann gilt nach Lemma 2.2 (iii)  $F_A(u) \oplus F_B(u) = F_C(u)$ . Damit ist wegen Lemma 2.3  $\dim F_C(u) \geq d-2$ .

Nun wählen wir noch einen zweiten, von  $u$  verschiedenen Normaleneinheitsvektor  $v$ , für den ebenfalls gilt  $E = F_A(u) = F_A(v)$  und  $F_B(u) = F_B(v)$ . Damit gilt weiterhin  $F_C(u) = F_C(v)$ . Diese Seite von  $C$  liegt somit in zwei verschiedenen  $(d-1)$ -dimensionalen

Ebenen, denn es gilt  $F_C(u) \subseteq H_C(u)$  und  $F_C(v) \subseteq H_C(v)$ . Also liegt  $F_C(u) = F_C(v)$  ebenfalls im Durchschnitt von  $H_C(u)$  und  $H_C(v)$ . Da der Durchschnitt zweier verschiedener  $(d-1)$ -dimensionalen Ebenen  $(d-2)$ -dimensional ist, erhalten wir  $\dim F_C(u) \leq d-2$ , demzufolge ist  $\dim F_C(u) = d-2$ . Somit besitzt auch  $C$  eine  $(d-2)$ -dimensionale Seite, die parallel zu  $U$  ist.

Damit können wir in der Summendarstellung 3.17 über  $\mathfrak{U}_{d-2}(A)$  statt über  $\mathfrak{U}_{d-2}(C)$  summieren. Entsprechende Überlegungen gelten natürlich genauso für  $B$ . Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\Xi_f^\Phi(C) &= \sum_{U \in \mathfrak{U}_{d-2}(A)} \Psi_U(A) + \sum_{U \in \mathfrak{U}_{d-2}(B)} \Psi_U(B) \\ &= \Xi_f^\Phi(A) + \Xi_f^\Phi(B).\end{aligned}\quad \text{q.e.d.}$$

Ausgehend von diesem Konstruktionsprinzip werden wir nun ein neues System von Funktionalen einführen, indem wir bei der Konstruktion der Hadwigerschen Funktionalen das Volumen durch die mittlere Breite ersetzen.

**Definition 3.6:** Es seien wiederum  $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $k = 1, \dots, \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$  rational-lineare Funktionen mit  $f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Für eine Hyperkante  $e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)$  sei  $\alpha(e)$  erneut die Größe des Keilwinkels zwischen den beiden anliegenden  $(d-1)$ -dimensionalen Seitenflächen. Mit  $b_k(e)$  bezeichnen wir die mittlere Breite einer  $k$ -dimensionalen Seite  $e \in \mathfrak{F}_k$ , gemessen in dem  $k$ -dimensionalen Unterraum  $\text{aff}(e)$ . Wir definieren nun:

$$E_{f_1}^d(P) := \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} b_{d-2}(e) \cdot f(\alpha(e)) \quad (3.18)$$

Für  $k = 2, \dots, \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$  definieren wir dann rekursiv:

$$E_{f_1, \dots, f_k}^d(P) := \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} E_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}(e) \cdot f(\alpha(e)). \quad (3.19)$$

Ist  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ein uneigentliches Polytop, so setzen wir wieder  $E_{f_1, \dots, f_k}^d(P) := 0$ . Für die mittlere Breite selbst führen wir noch die Bezeichnung  $E^d(P) := b_d(P)$  ein.

Diese neuen Funktionalen haben nun ebenfalls einige schöne Eigenschaften:

**Lemma 3.10: (Eigenschaften der Funktionalen  $E_{f_1, \dots, f_k}^d$ )** Für alle Dimensionen  $d \geq 3$  und alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  ( $n = \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$ ) mit  $f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gilt für  $k = 1, \dots, n$ :

(i)  $E_{f_1, \dots, f_k}^d$  ist bewegungsinvariant:

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( P \cong Q \implies E_{f_1, \dots, f_k}^d(P) = E_{f_1, \dots, f_k}^d(Q) \right),$$

(ii)  $E_{f_1, \dots, f_k}^d$  ist homogen vom Grade 1:

$$\bigwedge_{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \bigwedge_{\lambda > 0} \left( E_{f_1, \dots, f_k}^d(\lambda \cdot P) = \lambda \cdot E_{f_1, \dots, f_k}^d(P) \right).$$

BEWEIS: (i) Zunächst ist nach Lemma 3.1 (iii) die mittlere Breite  $E^d$  bewegungsinvariant. Damit ist die Behauptung sogar für  $k = 0$  erfüllt. Es seien nun die  $E_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}$  bewegungsinvariant für alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_{k-1}$ . Für eine weitere rational-lineare Funktion  $f_k$  ist dann nach Definition 3.6 (3.18) bzw. (3.19)

$$E_{f_1, \dots, f_k}^d(P) = \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} E_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}(e) \cdot f(\alpha(e)).$$

Da die  $E_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}$  bewegungsinvariant sind und dies genauso für die Keilwinkelgrößen gilt, ist  $E_{f_1, \dots, f_k}^d$  ebenfalls bewegungsinvariant.

(ii) Nach Lemma 3.1 (ii) ist die mittlere Breite  $E^d$  homogen vom Grade 1. Also ist die Behauptung wieder sogar für  $k = 0$  erfüllt. Es seien nun die  $E_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}$  homogen vom Grade 1 für alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_{k-1}$ . Für eine weitere rational-lineare Funktion  $f_k$  ist dann nach Definition 3.6 (3.18) bzw. (3.19)

$$E_{f_1, \dots, f_k}^d(P) = \sum_{e \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} E_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}(e) \cdot f(\alpha(e)).$$

Die Keilwinkelgrößen sind jedoch invariant unter Ähnlichkeitsabbildungen. Da die  $E_{f_1, \dots, f_{k-1}}^{d-2}$  homogen vom Grade 1 sind, muss dies weiterhin für  $E_{f_1, \dots, f_k}^d$  gelten. q.e.d.

**Bemerkung 3.7:** Aus den Gleichungen (3.18) bzw. (3.19) der Definition 3.6 erhalten wir folgende explizite Darstellung:

$$E_{f_1, \dots, f_k}^d(P) := \sum_{e_k \in \mathfrak{F}_{d-2}(P)} \sum_{e_{k-1} \in \mathfrak{F}_{d-4}(e_k)} \cdots \sum_{e_1 \in \mathfrak{F}_{d-2k}(e_2)} b_{d-2k}(e_1) \cdot f_1(\alpha(e_1)) \cdots f_{k-1}(\alpha(e_{k-1})) \cdot f_k(\alpha(e_k)). \quad (3.20)$$

**Lemma 3.11:** Für ungerade Dimensionen  $d$  ( $d \geq 3$ ) ist  $E_{f_1, \dots, f_n}^d$  ( $n = \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1 = \frac{d-1}{2}$ ) Minkowski-additiv:

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( E_{f_1, \dots, f_n}^d(P \oplus Q) = E_{f_1, \dots, f_n}^d(P) + E_{f_1, \dots, f_n}^d(Q) \right).$$

Für diese gilt dann auch  $E_{f_1, \dots, f_n}^d = D_{f_1, \dots, f_n}^d$ .

BEWEIS: Zunächst ist nach Lemma 3.1 (i) die mittlere Breite  $E^d = b_d$  für alle  $d \geq 1$  Minkowski-additiv. Für  $d = 1$  sind die einzigen uneigentlichen Polytope die leere Menge und einzelne Punkte. Für diese verschwindet jedoch die mittlere Breite. Also ist die Behauptung für  $d = 1$  bzw.  $n = 0$  erfüllt. Es seien nun die  $E_{f_1, \dots, f_{n-1}}^{d-2}$  ebenfalls Minkowski-additiv für alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_{n-1}$  mit  $f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). Für uneigentliche Polytope  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^{d-2})$  sei  $E_{f_1, \dots, f_{n-1}}^{d-2}(P) = 0$ .  $f_n$  sei nun eine weitere rational-lineare Funktion mit  $f_n(\pi) = 0$ . Dann ist nach Lemma 3.9  $E_{f_1, \dots, f_n}^d$  ebenfalls Minkowski-additiv und es gilt  $E_{f_1, \dots, f_n}^d(P) = 0$  für alle uneigentlichen Polytope  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ .

Für  $d = 3$  ist nach Bemerkung 3.1 die mittlere Breite einer Kante  $e \in \mathfrak{F}_1(P)$  gleich der Länge derselben, demnach gilt  $b_1(e) = V_1(e)$ . Somit ist  $E_{f_1}^3 = D_{f_1}^3 = D_{f_1}$  gleich dem Dehnschen Funktional. Aus demselben Grund sind für ungerade Dimensionen  $d$  die Funktionale  $E_{f_1, \dots, f_n}^d = D_{f_1, \dots, f_n}^d$  für  $n = \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1 = \frac{d-1}{2}$ , also gleich den entsprechenden Hadwigerschen Funktionalen. q.e.d.

**Bemerkung 3.8:** Vorerst offen bleiben muss die Frage, ob die Funktionale  $E_{f_1, \dots, f_k}^d$  auch für  $n \neq \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1$  bzw. für gerade Dimensionen Minkowski-additiv sind. Zumindest erfüllen sie nach Lemma 3.10 (ii) die nach Lemma 3.5 dazu notwendige Bedingung rational-homogen vom Grade 1 zu sein.

Da jedoch die mittlere Breite nur für  $d = 1$  für alle uneigentliche Polytope verschwindet, kann Lemma 3.9 nur für diesen Fall angewendet werden. Dies ergibt genau die in Lemma 3.11 behandelten Funktionale.

Für die Frage nach notwendigen Bedingungen für die Minkowskische Zerlegungsgleichheit ergibt sich also folgender

**Satz 3.4:** Für zwei Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  in Räumen ungerader Dimension gilt für alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  ( $n = \lceil \frac{d}{2} \rceil - 1 = \frac{d-1}{2}$ ) mit  $f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$P \stackrel{z}{=} Q \implies E_{f_1, \dots, f_n}^d(P) = E_{f_1, \dots, f_n}^d(Q).$$

Um weitere Minkowski-additive Funktionale zu finden führen wir nun ein weiteres Konstruktionsverfahren ein.

**Definition 3.7:**  $V(\mathbb{A}_k)$  sei der zu einem  $k$ -dimensionalen affinen Unterraum  $\mathbb{A}_k$  des  $\mathbb{E}^d$  gehörende lineare Unterraum. Für ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ist dann  $\mathfrak{U}_k(P) := \{U : U = V(\text{aff } F), F \in \mathfrak{F}_k(P)\}$  die Menge aller  $k$ -dimensionalen linearen Unterräume, die parallel zu einer  $k$ -dimensionalen Seite von  $P$  sind. Es sei  $\Phi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^k) \rightarrow \mathbb{R}$  ein bewegungsinvariantes und Minkowski-additives Polyederfunktional, welches für uneigentliche Polytope verschwindet (d.h.  $\Phi(P) = 0$ , falls  $\dim P < k$ ). Dann definieren wir ein Funktional  $\Psi^\Phi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\Psi^\Phi(P) := \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(P)} \int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_P(u)) du.$$

Dabei ist  $\Phi(F_P(u))$  in einem  $k$ -dimensionalen affinen Unterraum zu bestimmen, der  $F_P(u)$  enthält. Ist  $\dim F_P(u) > k$ , so setzen wir  $\Phi(F_P(u)) = 0$ .

**Lemma 3.12:** (i)  $\Psi^\Phi(P)$  hat auch folgende Darstellung:

$$\Psi^\Phi(P) = \sum_{F \in \mathfrak{F}_k(P)} \Phi(F) \cdot \delta(F),$$

wobei  $\delta(F)$  das Maß des äußeren Winkels von  $F$  ist.

(ii) Für  $k = d-1$  vereinfacht sich die Darstellung für eigentliche Polytope  $P \in \mathfrak{P}_d$  zu

$$\Psi^\Phi(P) = \sum_{F \in \mathfrak{F}_{d-1}(P)} \Phi(F).$$

(iii) Ist  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  uneigentlich, so erhält man für  $k = d-1$

$$\Psi^\Phi(P) = 2 \cdot \Phi(P).$$

Ist dabei  $\dim P < d-1$ , so ist  $\Psi^\Phi(P) = 0$ .

BEWEIS: (i) Da  $P$  nur endlich viele Seiten besitzt, nimmt  $\Phi(F_P(u))$  nur endlich viele Werte an.  $\Phi(F_P(u))$  ist dabei für jede Seite  $F \in \mathfrak{F}(P)$  konstant auf dem relativ offenen Normalenkegel  $\check{N}_F := \{u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : F = F_P(u)\}$ . Diese bilden nach Lemma 2.11 (i) eine disjunkte Zerlegung des  $\mathbb{E}^d \setminus \{o\}$ :

$$\bigcup_{k=0}^{d-1} \bigcup_{F \in \mathfrak{F}_k(P)} \check{N}_F = \mathbb{E}^d \setminus \{o\}.$$

Damit erhalten wir des weiteren eine Zerlegung für die  $(d-k-1)$ -dimensionalen Sphäre  $U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}$ :

$$\bigcup_{k=0}^{d-1} \bigcup_{F \in \mathfrak{F}_k(P)} (\check{N}_F \cap U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}) = U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}.$$

Indem wir noch beachten, dass  $\Phi(F) = 0$  ist, falls  $\dim F \neq k$  gilt, erhalten wir für  $\Psi^\Phi$  folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \Psi^\Phi(P) &= \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(P)} \int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_P(u)) \, du \\ &= \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(P)} \sum_{\substack{F \in \mathfrak{F}_k(P) \\ F \parallel U}} \Phi(F) \cdot \sigma_{d-k-1}(\check{N}_F \cap U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}). \end{aligned}$$

Da  $F$  parallel zu  $U$  liegt, gilt  $\check{N}_F \subseteq U^\perp$  und es ergibt sich

$$\Psi^\Phi(P) = \sum_{F \in \mathfrak{F}_k(P)} \Phi(F) \cdot \sigma_{d-k-1}(\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}).$$

Durch Übergang von  $\check{N}_F$  zur abgeschlossenen Hülle  $\text{cl } \check{N}_F = N_F$  ändert sich das Maß  $\sigma_{d-k-1}(\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1})$  nicht. Unter Berücksichtigung von  $\sigma_{d-k-1}(N_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) = \delta(F)$  erhält man

$$\Psi^\Phi(P) = \sum_{F \in \mathfrak{F}_k(P)} \Phi(F) \cdot \delta(F).$$

- (ii) Jede  $(d-1)$ -dimensionale Seitenfläche  $F \in \mathfrak{F}_{d-1}(P)$  eines eigentlichen Polytops  $P \in \mathfrak{P}_d$  besitzt nur einen einzigen Normaleneinheitsvektor. Da für  $k = d-1$  das Maß  $\sigma_{d-k-1} = \sigma_0$  das Zählmaß ist, ist  $\delta(F) = \sigma_0(N_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) = 1$ . Somit erhalten wir mit Teil (i)

$$\Psi^\Phi(P) = \sum_{F \in \mathfrak{F}_{d-1}(P)} \Phi(F).$$

- (iii) Ist  $\dim P = d-1$ , so ist  $P$  selbst die einzige  $(d-1)$ -dimensionale Seite von  $P$ . Bezeichnet  $U$  den zu  $\text{aff } P$  gehörenden linearen Unterraum, so ist  $N_P = U^\perp$ . Es gilt daher  $\dim N_P = \dim U^\perp = 1$ . Für  $N_P \cap \mathbb{S}^{d-1}$  gilt deshalb  $\sigma_0(N_P \cap \mathbb{S}^{d-1}) = \omega_0 = 2$ . ( $\omega_0$  ist die Oberfläche der 0-dimensionalen Einheitssphäre.) Also gilt in dem Fall

$$\Psi^\Phi(P) = 2 \cdot \Phi(P).$$

Ist  $\dim P < d-1$ , so ist nach Definition 3.7  $\Psi^\Phi(P) = 0$ . q.e.d.

Direkt aus der Definition 3.7 bzw. der Darstellung aus Lemma 3.12 ergeben sich einige wichtige Eigenschaften der Funktionalen:

**Lemma 3.13:** (i)  $\Psi^\Phi$  ist ein bewegungsinvariantes Funktional.

(ii) Ist  $\Phi$  homogen vom Grade  $h$ , so ist  $\Psi^\Phi$  ebenfalls homogen vom Grade  $h$ .

(iii) Ist  $\Phi$  nichttrivial, so gibt es stets uneigentliche Polytope  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , ( $\dim P = k$ ) mit  $\Psi^\Phi(P) \neq 0$ .

Für uns wichtig ist noch die Eigenschaft der Minkowski-Additivität.

**Lemma 3.14:**  $\Psi^\Phi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Minkowski-additives Polyederfunktional.

BEWEIS: Es seien wiederum  $A, B, C \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  drei Polytope mit  $A \oplus B = C$ . Da  $\Phi$  Minkowski-additiv ist, gilt wegen Lemma 2.2 (iii) für alle  $u$  mit  $\dim F_C(u) \leq k$ :

$$\Phi(F_C(u)) = \Phi(F_A(u)) + \Phi(F_B(u)).$$



Ist jedoch  $\dim F_C(u) > k$  für ein  $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\}$ , so ist zwar  $\Phi(F_C(u)) = 0$ , aber für  $\Phi(F_A(u))$  und  $\Phi(F_B(u))$  gilt dies im allgemeinen nicht, da durchaus  $\dim F_A(u) = k$  bzw.  $\dim F_B(u) = k$  gelten kann. Sei nun  $F \in \mathfrak{F}(C)$  mit  $\dim F > k$ . Dann ist  $\Phi(F_C(u))$  konstant auf der Menge  $\check{N}_F := \{u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : F = F_C(u)\}$ . Ist  $V_F$  der zu  $\text{aff}(F)$  gehörende lineare Unterraum, so gilt  $\check{N}_F \subseteq V_F^\perp$ . Da  $\dim V_F = \dim F > k$  ist, gilt für die Dimension von  $\check{N}_F$ :  $\dim N_F \leq \dim V_F^\perp < d - k$  und damit  $\dim(\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) \leq \dim(V_F^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}) < d - k - 1$ . Somit ist  $\sigma_{d-k-1}(\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) = 0$ .  $\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}$  ist damit eine Nullmenge bzgl.  $\sigma_{d-k-1}$  und spielt demnach bei der Integration keine Rolle. Wir erhalten also

$$\Psi^\Phi(C) = \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(C)} \int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_C(u)) d\sigma_{d-k-1}(u) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(C)} \int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} (\Phi(F_A(u)) + \Phi(F_B(u))) d\sigma_{d-k-1}(u) \\ &= \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(C)} \int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_A(u)) du + \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(C)} \int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_B(u)) du \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ist  $U \in \mathfrak{U}_k(C)$ , aber  $U \notin \mathfrak{U}_k(A)$ , so gilt für alle  $v \in U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}$ : Ist  $\dim F_A(v) < k$  oder  $\dim F_A(v) > k$ , so ist  $\Phi(F_A(v)) = 0$ . Ist andererseits  $\dim F_A(v) = k$ , so setzen wir  $F := F_A(v)$ , und wir betrachten den offenen Normalenkegel  $\check{N}_F := \{u \in \mathbb{E}^d \setminus \{o\} : F = F_A(u)\}$ . Da  $F$  nicht parallel zu  $U$  ist, gilt  $\check{N}_F \not\subseteq U^\perp$ . Damit erhalten wir für die Dimension von  $N_F \cap U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}$  die Abschätzung  $\dim(N_F \cap U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}) < \dim(U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}) = d - k - 1$ . Demzufolge ist  $N_F \cap U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}$  eine Nullmenge bzgl.  $\sigma_{d-k-1}$ . Somit erhalten wir

$$\int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_A(u)) d\sigma_{d-k-1}(u) = 0. \quad (3.23)$$

Analog erhalten wir, falls  $U \in \mathfrak{U}_k(C)$ , aber  $U \notin \mathfrak{U}_k(B)$

$$\int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_B(u)) d\sigma_{d-k-1}(u) = 0. \quad (3.24)$$

Folglich können wir bei der Summenbildung in der Darstellung (3.22) all jene Summanden weglassen, für die  $U \notin \mathfrak{U}_k(A)$  bzw.  $U \notin \mathfrak{U}_k(B)$  gilt.

Ist umgekehrt  $U \in \mathfrak{U}_k(A)$  oder  $U \in \mathfrak{U}_k(B)$ , aber  $U \notin \mathfrak{U}_k(C)$ , so erhalten wir entsprechend zu Gleichung (3.23) bzw. (3.24)

$$\int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_C(u)) d\sigma_{d-k-1}(u) = 0. \quad (3.25)$$

Damit können wir bei der Summenbildung in der Darstellung (3.22) die entsprechenden Summanden hinzunehmen, für die  $U \in \mathfrak{U}_k(A)$  oder  $U \in \mathfrak{U}_k(B)$ , aber  $U \notin \mathfrak{U}_k(C)$  ist. Es gilt demnach

$$\begin{aligned}\Psi^\Phi(C) &= \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(A)} \int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_A(u)) du + \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(B)} \int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} \Phi(F_B(u)) du \\ &= \Psi^\Phi(A) + \Psi^\Phi(B).\end{aligned}\quad \text{q.e.d.}$$

Geht man von einem Minkowski-additiven Funktional  $\Phi$  aus, welches für uneigentliche Polytope verschwindet, so liefern beide Konstruktionsmethoden stets wieder Minkowski-additive Funktionale. Allerdings besitzt nur das nach der ersten Methode gewonnene Funktional  $\Xi_f^\Phi$  die Eigenschaft, dass es für uneigentliche Polytope verschwindet. Deshalb kann nur die erste Methode iterativ angewendet werden. Auf die so gewonnenen Funktionale kann dann die zweite Methode angewandt werden. Dies wollen wir nun für die Funktionale  $E_{f_1, \dots, f_n}^d$  ( $n = \frac{d-1}{2}$ ) tun.

**Definition 3.8:**  $V(\mathbb{A}_k)$  sei wieder der zu einem  $k$ -dimensionalen affinen Unterraum  $\mathbb{A}_k$  des  $\mathbb{E}^d$  gehörende lineare Unterraum. Für ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ist dann  $\mathfrak{U}_k(P) := \{U : U = V(\text{aff } F), F \in \mathfrak{F}_k(P)\}$  die Menge aller  $k$ -dimensionalen linearen Unterräume, die parallel zu einer  $k$ -dimensionalen Seite von  $P$  sind. Für ungerade  $k < d$  und  $n = \frac{k-1}{2}$  definieren wir

$$G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(P) := \sum_{U \in \mathfrak{U}_k(P)} \int_{U^\perp \cap \mathbb{S}^{d-1}} E_{f_1, \dots, f_n}^k(F_P(u)) du.$$

Da die Funktionale  $G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}$  nach dem Konstruktionsprinzip von Definition 3.7 gebildet sind, erhalten wir aus den Lemmata 3.13 und 3.14 gleich die wichtigsten Eigenschaften.

**Lemma 3.15: (Eigenschaften der Funktionale  $G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}$ )** Für alle Dimensionen  $d \geq 4$ , alle ungeraden Zahlen  $k < d$  und alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  ( $n = \frac{k-1}{2}$ ) mit  $f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gilt:

(i)  $G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}$  ist bewegungsinvariant:

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( P \cong Q \implies G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(P) = G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(Q) \right),$$

(ii)  $G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}$  ist homogen vom Grade 1:

$$\bigwedge_{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \bigwedge_{\lambda > 0} \left( G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(\lambda \cdot P) = \lambda \cdot G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(P) \right),$$

(iii)  $G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}$  ist Minkowski-additiv:

$$\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(P \oplus Q) = G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(P) + G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(Q) \right).$$

Damit liefern die Funktionale  $G_{f_1, \dots, f_k}^{d,k}$  weitere notwendige Bedingungen für die Minkowskische Zerlegungsgleichheit. Insbesondere erhalten wir damit Kriterien, die auch in Räumen mit gerader Dimension anwendbar sind.

**Satz 3.5:** Für zwei Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , ( $d \geq 4$ ) gilt für alle ungeraden  $k < d$  und alle rational-linearen Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  ( $n = \frac{k-1}{2}$ ) mit  $f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$P \stackrel{z}{=} Q \implies G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(P) = G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}(Q).$$

**Bemerkung 3.9:** Zu den Ergebnissen dieses Abschnitts kann man auch auf andere Weise gelangen, indem man die engen Beziehungen zwischen Minkowski-additiven Funktionalen und Bewertungen ausnutzt. Einerseits ist jede Minkowski-additive Funktion eine Bewertung. Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen sind andererseits, wie etwa das Hadwigersche Lemma 3.3 zeigt, auch Bewertungen Minkowski-additiv. Zur Theorie der Bewertungen sei auf die Artikel von McMullen und Schneider [MS, McM] verwiesen.

Der hier gewählte Ansatz verfolgt das Ziel, auf direktem Wege ohne den Umweg über die Theorie der Bewertungen zu Ergebnissen zu gelangen. So konnten eine ganze Reihe Minkowski-additiver Funktionale gefunden werden, die für konkrete Polytope leicht bestimmt werden können. Des weiteren wurden zwei Konstruktionsverfahren angegeben, mit denen man neue Minkowski-additive Funktionale konstruieren kann.

## 3.2. Hinreichende Bedingungen

### 3.2.1. Zerlegungen von Polytopen

Um hinreichende Bedingungen für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit von Polytopen zu finden, wollen wir zunächst untersuchen, welche Zerlegungen von Polytopen überhaupt möglich sind. Immer möglich ist die triviale Zerlegung in homothetische Kopien:

**Lemma 3.16:** Jedes konvexe Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  gestattet für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  folgende Zerlegung:

$$P = \bigoplus_{i=1}^n (\lambda_i P + t_i) \quad \text{für alle } \lambda_i \in [0, 1] \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$\text{und alle } t_i \in \mathbb{E}^d \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n t_i = o.$$

BEWEIS: Sei  $x \in P$  und die  $\lambda_i$  und  $t_i$  wie oben. Dann lässt sich  $x$  darstellen als

$$x = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \cdot x + \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\lambda_i x + t_i)}_{\in \lambda_i P}.$$

Damit ist  $x \in \bigoplus_{i=1}^n (\lambda_i P + t_i)$ .

Sei jetzt  $z \in \bigoplus_{i=1}^n (\lambda_i P + t_i)$ . Dann existieren  $x_1, \dots, x_n \in P$ , sodass  $z$  sich darstellen lässt als

$$z = \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i + t_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n t_i}_{=o} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i x_i}_{\in P}.$$

Damit ist  $z$  eine Konvexkombination von Punkten aus  $P$ . Da  $P$  konvex ist, gilt  $z \in P$ . q.e.d.

Interessant sind jetzt diejenigen Polytope, die keine anderen Zerlegungen zulassen.

**Definition 3.9:** (a)  $Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  heißt *Summand* von  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , wenn ein Polytop  $R \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  existiert, sodass  $P = Q \oplus R$  ist.

(b) Ein Summand  $Q$  eines Polytopes  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  heißt *maximaler Summand*, wenn für kein  $\lambda > 1$   $\lambda \cdot Q$  ein Summand von  $P$  ist.

(c)  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  heißt *unzerlegbar*, wenn  $P$  nur die Zerlegungen aus Lemma 3.16 besitzt.

**Lemma 3.17:** [Sch, S. 145] *Jeder Summand von  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ist Durchschnitt einer Familie von Translaten von  $P$ .*

BEWEIS: Sei  $P = Q \oplus R$ . Wir behaupten:  $Q = \bigcap_{r \in R} (P - r)$ . Dazu genügt es zu zeigen, dass  $P = \bigcap_{r \in R} (P - r) \oplus R$  gilt. Für alle  $r \in R$  liegt natürlich der Nullpunkt  $o$  in  $R - r$ . Daher gilt für alle  $r \in R$ :  $Q \subseteq Q \oplus (R - r) = (Q \oplus R) - r$ . Damit gilt dies ebenso für den Durchschnitt:  $Q \subseteq \bigcap_{r \in R} (Q \oplus R - r) = \bigcap_{r \in R} (P - r)$ . Demnach ist  $P = Q \oplus R \subseteq \bigcap_{r \in R} (P - r) \oplus R$ .

Sei nun  $x \in \bigcap_{r \in R} (P - r) \oplus R$ . Dann existiert natürlich ein  $y \in \bigcap_{r \in R} (P - r)$  und ein  $z \in R$ , sodass  $x = y + z$ . Somit gilt für alle  $r \in R$ , dass  $y \in P - r$ . Wählen wir speziell  $r = z$ , so erhalten wir  $y \in P - z$ . Infolge dessen ist  $x = y + z \in (P - z) + z = P$  und wir erhalten  $\bigcap_{r \in R} (P - r) \oplus R \subseteq P$ . q.e.d.

Für  $d = 2$  gilt sogar die Umkehrung von Lemma 3.17:

**Lemma 3.18:** [Sch, Theorem 3.2.3] *Für konvexe Polygone  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^2)$  ist jeder nicht-leere Durchschnitt von Translaten von  $P$  ein Summand von  $P$ .*

BEWEIS: Sei  $Q = \bigcap_{t \in T} (P + t) \neq \emptyset$ . Da  $P$  ein konvexes Polygon ist, lässt es sich stets darstellen als Durchschnitt von (endlich vielen) Halbebenen:

$$P = \bigcap_{i=1}^k H_{u_i, \alpha_i}^-, \quad \text{wobei} \quad H_{u_i, \alpha_i}^- = \{x \in \mathbb{E}^2 : \langle u_i, x \rangle \leq \alpha_i\}.$$

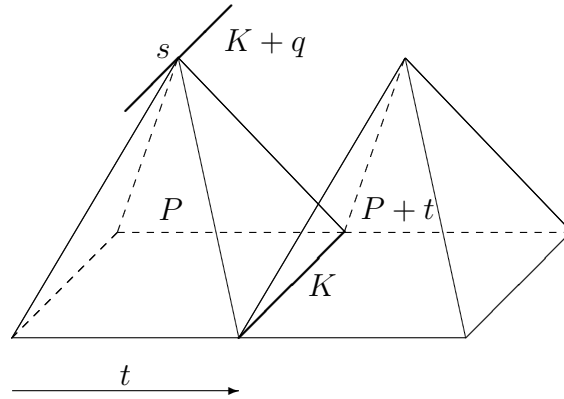
Es gilt dann

$$\begin{aligned} Q &= \bigcap_{t \in T} (P + t) = \bigcap_{t \in T} \left( \bigcap_{i=1}^k H_{u_i, \alpha_i}^- + t \right) = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{i=1}^k H_{u_i, \alpha_i + \langle u_i, t \rangle}^- = \bigcap_{i=1}^k \bigcap_{t \in T} H_{u_i, \alpha_i + \langle u_i, t \rangle}^- \\ &= \bigcap_{i=1}^k H_{u_i, \alpha_i + \beta_i}^-, \quad \text{wobei} \quad \beta_i := \inf_{t \in T} \langle u_i, t \rangle. \end{aligned}$$

Sei  $x \in P$ . Dann existiert ein  $t \in \mathbb{E}^2$ , sodass  $Q + t \subseteq P$  und  $x \in Q + t$ . Damit gilt für alle  $q \in Q$  :  $q + t \in P$  bzw.  $t \in P - q$ . Folglich liegt  $t$  im Durchschnitt aller  $P - q$  :  $t \in \bigcap_{q \in Q} (P - q)$ . Somit ist  $x \in Q \oplus \bigcap_{q \in Q} (P - q)$  und damit ist  $P \subseteq Q \oplus \bigcap_{q \in Q} (P - q)$ .

Sei umgekehrt  $x \in Q \oplus \bigcap_{q \in Q} (P - q)$ . Dann existiert ein  $y \in Q$  und ein  $z \in \bigcap_{q \in Q} (P - q)$ , sodass  $x = y + z$ . Damit gilt für alle  $q \in Q$  :  $z \in P - q$  und speziell für  $q=y$  erhalten wir  $z \in P - y$ . Somit ist  $x = z + y \in (P - y) + y = P$ . Insgesamt ist  $P = Q \oplus \bigcap_{q \in Q} (P - q)$ . Daraus folgt, dass  $Q$  ein Summand von  $P$  ist. q.e.d.

**Bemerkung 3.10:** Für  $d \geq 3$  ist die Aussage von Lemma 3.18 im allgemeinen falsch. Dazu betrachte man zum Beispiel eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche im  $\mathbb{E}^3$ .



**Abbildung 2:** Die Kante  $K$  ist Durchschnitt der Pyramide  $P$  mit einem um  $t$  verschobenem Exemplar  $P + t$

In Abbildung 2 ist eine solche Pyramide  $P$  mit einem um eine Kantenlänge verschobenem Exemplar  $P + t$  zu sehen. Der Durchschnitt dieser beiden Pyramiden ist die Kante  $K$  von  $P$ . Wenn wir annehmen, dass  $K$  ein Summand von  $P$  ist, so gibt es ein Polytop

$Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^3)$ , sodass  $P = K \oplus Q$  gilt. Insbesondere hat dann die Spitze  $s$  der Pyramide  $P$  eine Darstellung  $s = k + q$  mit  $k \in K$  und  $q \in Q$ . Dann müsste jedoch  $K + q \subseteq P$  gelten. Dies ist jedoch offensichtlich nicht der Fall. (Man vergleiche dazu Definition 3.10 und Lemma 3.21 auf Seite 57, wo ein Kriterium für Summanden angegeben ist.)

**Lemma 3.19:** (i) Ist ein Polygon  $Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^2)$  ein Summand von  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^2)$ , so ist jede Normalenrichtung einer Seite von  $Q$  auch Normalenrichtung einer Seite von  $P$ .

(ii) Ist eine Strecke  $S$  ein Summand von einem Polygon  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^2)$ , so besitzt  $P$  ein Paar paralleler Seiten, die auch zu  $S$  parallel sind.

BEWEIS: Folgerung aus Lemma 2.2 (iii).

q.e.d.

**Lemma 3.20:** (i) Strecken und Dreiecke sind unzerlegbar.

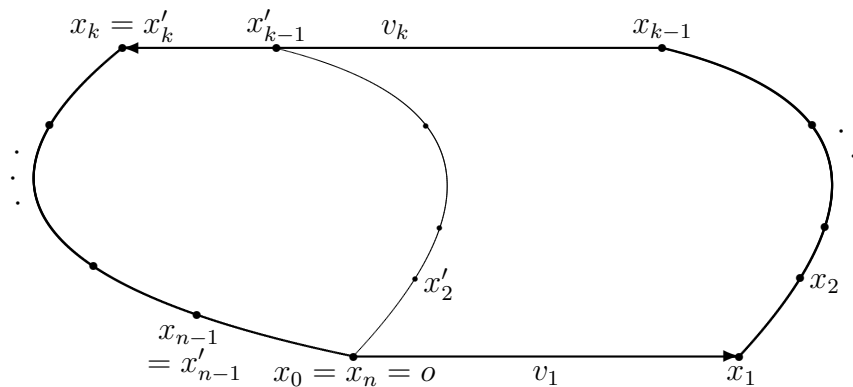
(ii) Jedes konvexe Polygon lässt sich in Strecken und Dreiecke zerlegen.

BEWEIS: (i) Für Strecken ist die Aussage klar. Da ein Summand eines Dreiecks ein Polygon sein muss, welches dieselben Normalenvektoren besitzt, kann es nur ein Dreieck sein, welches homothetisch zum Ausgangsdreieck ist. Demnach besitzt jedes Dreieck nur die triviale Zerlegung aus Lemma 3.16.

(ii) Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion über die Eckenzahl.

Der Induktionsanfang für  $n = 2$  und  $n = 3$  ist trivial. Nehmen wir an, dass sich jedes Polygon mit höchstens  $n - 1$  Ecken in Strecken und Dreiecke zerlegen lässt. Um für  $n$ -Ecke die Behauptung zu beweisen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

**1. Fall:** Das  $n$ -Eck  $P$  besitzt ein Paar paralleler Seiten.



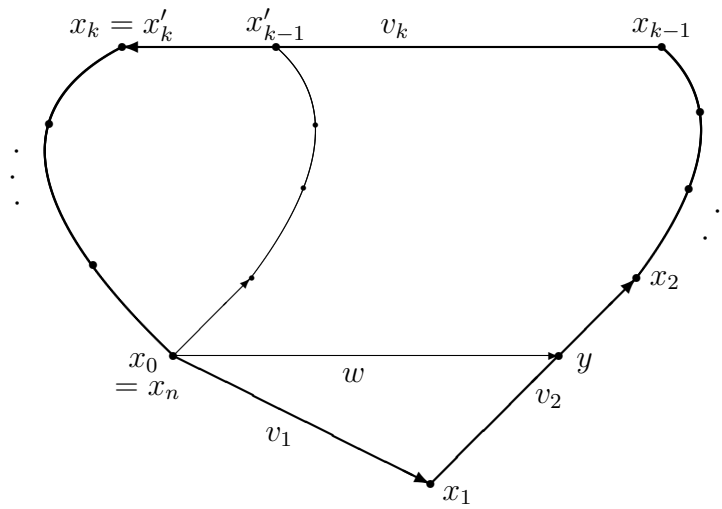
**Abbildung 3:**  $n$ -Eck mit einem Paar paralleler Seiten

$x_1, \dots, x_n = x_0$  seien die Eckpunkte von  $P$  in positivem Umlaufsinn geordnet und  $v_i := x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) seien die Seitenvektoren von  $P$ . Dann ist natürlich  $x_i = x_0 + v_1 + \dots + v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und es gilt  $\sum_{i=1}^n v_i = o$ .

O.B.d.A. sei  $x_0 = o$  und  $v_1 = -\lambda v_k$  mit  $0 < \lambda \leq 1$ , d.h. die Seiten(-vektoren)  $v_1$  und  $v_k$  liegen parallel und es gilt  $|v_1| \leq |v_k|$ . Dann ist die Strecke  $\overline{x_0 x_1}$  ein Summand von  $P$ . Jetzt definieren wir die Eckpunkte eines neuen Polygons  $P'$  durch  $x'_i := x_i - v_1$  für  $i = 1, \dots, k-1$  und  $x'_i := x_i$  für  $i = k, \dots, n$ . Es gilt nun  $x'_1 = x_1 - (x_1 - x_0) = x_0 = x_n = x'_n$ . Also fallen die beiden Eckpunkte  $x'_1$  und  $x'_n$  zusammen. Damit besitzt  $P' := \text{conv}\{x'_1, \dots, x'_{n-1}\}$  höchstens  $n-1$  Ecken. Ist  $\lambda = 1$ , so fallen ebenso die Ecken  $x_{k-1}$  und  $x_k$  zusammen und  $P'$  ist nur ein  $(n-2)$ -Eck. Damit haben wir das Polygon  $P$  zerlegt in  $P = \overline{x_0 x_1} \oplus P'$ .  $P'$  lässt sich nach der Induktionsvoraussetzung in Strecken und Dreiecke zerlegen und damit ebenso  $P$ .

**2. Fall:** Das  $n$ -Eck  $P$  besitzt kein Paar paralleler Seiten.

Wie im 1. Fall seien  $x_1, \dots, x_n = x_0$  die Eckpunkte von  $P$  in positivem Umlaufsinn



**Abbildung 4:**  $n$ -Eck ohne Seite, die parallel zu  $v_k$  ist

geordnet und  $v_i := x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die Seitenvektoren von  $P$ . Dann ist wieder  $x_i = x_0 + v_1 + \dots + v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und es gilt  $\sum_{i=1}^n v_i = o$ .

Weiter sei  $\overline{x_{k-1} x_k}$  eine beliebige Seite von  $P$  und  $x_1$  sei der Eckpunkt mit dem größten Abstand von der Geraden  $g(x_{k-1}, x_k)$  durch  $x_{k-1}$  und  $x_k$ . Dann gibt es weiter keinen Eckpunkt, der denselben Abstand von dieser Geraden besitzt und  $x_0$  oder  $x_2$  besitzen den zweitgrößten Abstand von der Geraden  $g(x_{k-1}, x_k)$ . O.B.d.A. sei dies  $x_0$ .  $y$  sei nun der Schnittpunkt der Parallelen zu  $g(x_{k-1}, x_k)$  durch den Punkt  $x_0$  mit der Seite  $\overline{x_1 x_2}$  und  $w := y - x_0$  (vgl. Abbildung 4). Jetzt müssen wir wiederum zwei Fälle unterscheiden:

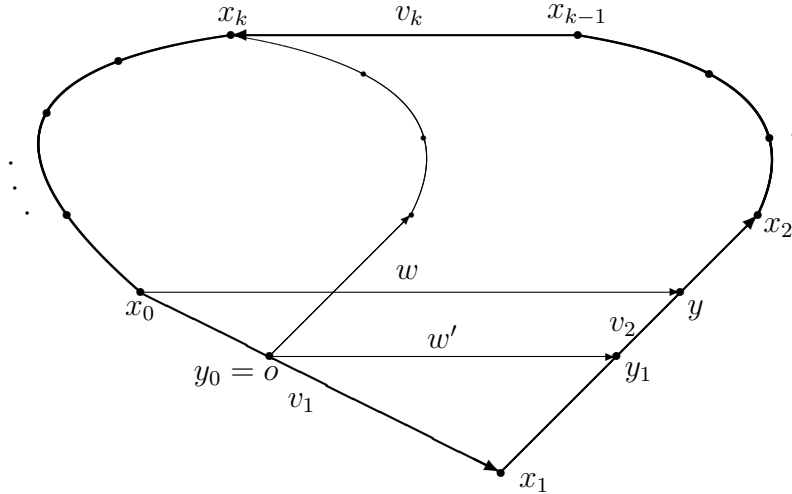
**Fall 2.1:**  $|w| \leq |v_k|$ .

O.B.d.A. sei  $x_0 = o$ . Dann ist das Dreieck  $\triangle x_0 x_1 y$  ein Summand von  $P$ . Jetzt definieren wir die Eckpunkte eines neuen Polygons  $P'$  durch  $x'_i := x_i - w$  für  $i = 2, \dots, k-1$  und  $x'_i := x_i$  für  $i = k, \dots, n$ . Damit besitzt  $P' := \text{conv}\{x'_2, \dots, x'_n\}$  höchstens  $n-1$  Ecken. Ist  $|w| = |v_k|$ , so fallen ebenso die Ecken  $x_{k-1}$  und  $x_k$

zusammen und  $P'$  ist nur ein  $(n-2)$ -Eck. Damit haben wir das Polygon  $P$  zerlegt in  $P = \triangle x_0 x_1 y \oplus P'$ .  $P'$  lässt sich nach der Induktionsvoraussetzung in Strecken und Dreiecke zerlegen und damit auch  $P$ .

**Fall 2.2:**  $|w| > |v_k|$ .

Dann gibt es einen Punkt  $y_0 \in \overline{x_0 x_1}$  und einen Punkt  $y_1 \in \overline{x_1 x_2}$  mit der Eigenschaft,



**Abbildung 5:**  $n$ -Eck – Situation im Fall 2.2

dass  $w' := y_1 - y_0 = -v_k$ . O.B.d.A. sei  $y_0 = o$ . Dann ist das Dreieck  $\triangle y_0 x_1 y_1$  ein Summand von  $P$ . Jetzt definieren wir die Eckpunkte eines neuen Polygons  $P'$  durch  $x'_i := x_i - w'$  für  $i = 2, \dots, k-1$  und  $x'_i := x_i$  für  $i = k, \dots, n$ . Dann ist  $x'_{k-1} = x'_k$  und  $P' := \text{conv}\{y_0, x'_2, \dots, x'_n\}$  ist ein  $(n-1)$ -Eck. Damit haben wir das Polygon  $P$  zerlegt in  $P = \triangle y_0 x_1 y_1 \oplus P'$ .  $P'$  lässt sich nach der Induktionsvoraussetzung in Strecken und Dreiecke zerlegen und damit auch  $P$ . q.e.d.

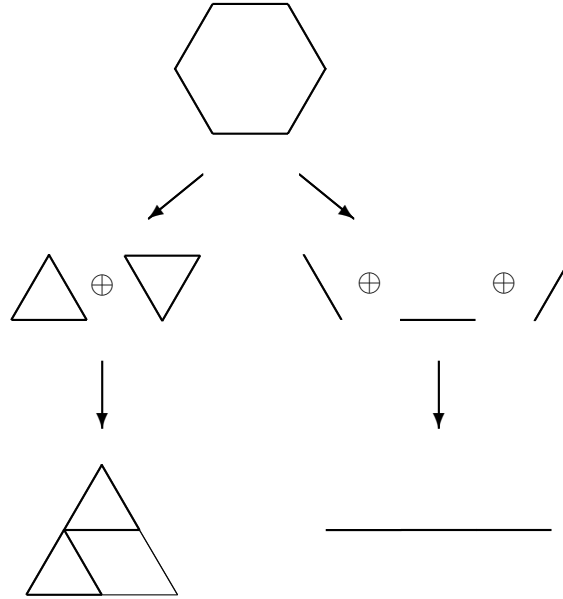
**Bemerkung 3.11:** (i) Für  $d \geq 3$  lassen sich die unzerlegbaren Polytope nicht in der Art charakterisieren.

(ii) Die Zerlegung eines Polygons in Strecken und Dreiecke ist nicht eindeutig, wie Abbildung 6 zeigt.

Ein reguläres Sechseck lässt sich einerseits in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegen mit jeweils derselben Seitenlänge wie das Sechseck. Andererseits lässt es sich auch in drei Strecken mit der Länge der Seiten des Sechsecks zerlegen. Da Strecken und Dreiecke unzerlegbar sind, lässt sich dieses Sechseck also auf zwei verschiedene Arten in unzerlegbare Polygone zerlegen.

(iii) Besitzt ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  eine Zerlegung  $P = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ , so besitzt  $\lambda \cdot P$  für  $\lambda \geq 0$  die Zerlegung  $\lambda \cdot P = \bigoplus_{i=1}^n (\lambda \cdot P_i)$ . Nach Lemma 3.16 besitzt jedes





**Abbildung 6:** Zwei mögliche Zerlegungen eines regulären Sechsecks

Polytop für jedes  $\mu \in [0, 1]$  die triviale Zerlegung  $P = \mu \cdot P \oplus (1 - \mu) \cdot P$ . Besitzt  $P$  nun eine weitere Zerlegung  $P = \bigoplus_{j=1}^m Q_j$ , so ist für jedes  $\mu \in [0, 1]$  auch  $P = \bigoplus_{i=1}^n (\mu \cdot P_i) \oplus \bigoplus_{j=1}^m ((1 - \mu) \cdot Q_j)$  eine Zerlegung von  $P$ . Somit besitzt jedes Polytop, welches zwei verschiedene Zerlegungen besitzt, bereits eine ganze Schar verschiedener Zerlegungen.

- (iv) Da sich ein gleichseitiges Dreieck in trivialer Weise in zwei zu ihm ähnliche Dreiecke zerlegen lässt (vgl. Lemma 3.16), ist ein reguläres Sechseck Minkowski-zerlegungsgleich zu einem gleichseitigen Dreieck, dessen Seitenlänge doppelt so lang ist wie die des Sechsecks. Andererseits ist das Sechseck ebenso Minkowski-zerlegungsgleich zu einer Strecke der dreifachen Seitenlänge des Sechsecks. Da aber Strecken und Dreiecke unzerlegbar sind, können sie nicht zerlegungsgleich sein. Damit ist die Minkowski-Zerlegungsgleichheit nicht transitiv, und somit keine Kongruenzrelation. Um diesen Nachteil zu beheben, kann man verschiedene Verallgemeinerungen der Zerlegungsgleichheit untersuchen. Dies wird in Abschnitt 3.2.3 durchgeführt.

### 3.2.2. Kriterien für Summanden von Polytopen

Wir wollen nun noch Kriterien untersuchen, wann ein konvexer Körper bzw. ein Polytop ein Summand eines anderen ist.

**Definition 3.10:** Es seien  $K, L \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  zwei konvexe Körper. Man sagt  $L$  *gleitet frei in*  $K$  genau dann, wenn für jeden Randpunkt  $x \in \text{bd } K$  ein Translationsvektor  $t \in \mathbb{E}^d$  existiert, sodass  $x \in L + t \subseteq K$ .

Allgemein bekannt ist etwa das folgende Kriterium:

**Lemma 3.21:** [Sch, Theorem 3.2.2] *Es seien  $K, L \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  zwei konvexe Körper. Dann ist  $L$  genau dann ein Summand von  $K$ , wenn  $L$  frei in  $K$  gleitet.*

BEWEIS: Es sei  $L$  ein Summand von  $K$ . Demnach gibt es ein  $M \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$ , sodass  $K = L \oplus M$ . Sei weiter  $x$  ein Randpunkt von  $K$ . Dann gibt es ein  $l \in L$  und ein  $t \in M$ , sodass  $x = l + t$ . Folglich ist  $x \in L + t \subseteq L \oplus M = K$ .

Umgekehrt gleite nun  $L$  frei in  $K$ . Dann existiert für jedes  $x \in \text{bd } K$  ein Translationsvektor  $t \in \mathbb{E}^d$ , sodass  $x \in L + t \subseteq K$ . Damit gibt es für jedes  $l \in L$  ein  $k \in K$  mit  $l + t = k$  bzw.  $t = k - l$ . Also gilt  $t \in \bigcap_{l \in L} (K - l)$ . Definieren wir nun  $M := \bigcap_{l \in L} (K - l)$ , so ist  $x \in L \oplus M$ . Da dies für jeden Randpunkt  $x \in \text{bd } K$  gilt, erhalten wir  $\text{bd } K \subseteq L \oplus M$ . Außerdem sind  $L$  und  $M$  und damit auch  $L \oplus M$  konvexe Mengen. Also gilt  $K \subseteq L \oplus M$ .

Ist nun  $y \in L \oplus M$ , so gibt es ein  $\tilde{l} \in L$  und ein  $m \in M$  mit  $y = \tilde{l} + m$ . Da  $m \in M = \bigcap_{l \in L} (K - l)$  ist  $m \in K - \tilde{l}$ . Infolge dessen ist  $y = \tilde{l} + m \in K$  und damit ist weiterhin  $K \supseteq L \oplus M$ . Somit gilt  $K = L \oplus M$  und  $L$  ist ein Summand von  $K$ . q.e.d.

**Definition 3.11:** Für jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  definieren wir eine Funktion  $\xi_P : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\xi_P(u) := \begin{cases} V_1(F_P(u)) & : F_P(u) \in \mathfrak{F}_1(P), \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

**Bemerkung 3.12:** (i) Für ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  gilt genau dann  $\xi_P \equiv 0$ , wenn  $P$  eine einpunktige Menge ist.

(ii)  $\xi_P$  ist für jede Seite  $F \in \mathfrak{F}(P)$  konstant auf  $\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}$ . Und zwar ist genau dann  $\xi_P(u) > 0$ , wenn  $F_P(u)$  eine Kante ist. Da für eine Kante  $F \in \mathfrak{F}_1(P)$  das zugehörige sphärische Polytop  $\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}$   $(d-2)$ -dimensional ist, verschwindet  $\xi_P(u)$  fast überall bzgl.  $\sigma_{d-1}$ . Allerdings hat die Menge  $W := \{u \in \mathbb{S}^{d-1} : \xi_P(u) > 0\}$  stets ein positives und endliches  $(d-2)$ -dimensionales Maß (falls  $P$  keine einpunktige Menge ist).

(iii) Jede solche Funktion  $\xi_P$  bewirkt eine Zerlegung  $\mathfrak{Z}(P)$  der Sphäre  $\mathbb{S}^{d-1}$ :  $\mathfrak{Z}_1(P)$  sei die Menge aller Zusammenhangskomponenten von  $W = \{u \in \mathbb{S}^{d-1} : \xi_P(u) > 0\}$ . Die Elemente von  $\mathfrak{Z}_1(P)$  sind dann offene  $(d-2)$ -dimensionale sphärische Polytope und es gilt  $\mathfrak{Z}_1(P) = \{\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1} : F \in \mathfrak{F}_1(P)\}$ . Für  $k = 2, \dots, d-1$  enthält  $\mathfrak{Z}_k(P)$  die  $(d-k-1)$ -dimensionalen Seiten der Elemente von  $\mathfrak{Z}_1(P)$ , also  $\mathfrak{Z}_k(P) := \{\check{F} \in \check{\mathfrak{F}}_{d-k-1}(\check{A}) : \check{A} \in \mathfrak{Z}_1(P)\}$ . Für  $\mathfrak{Z}_k(P)$  gilt ebenfalls  $\mathfrak{Z}_k(P) = \{\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1} : F \in \mathfrak{F}_k(P)\}$ . Schließlich sei  $\mathfrak{Z}_0(P)$  die Menge aller Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{S}^{d-1} \setminus \text{cl}(W)$ . Für diese gilt ebenso  $\mathfrak{Z}_0(P) = \{\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1} : F \in \mathfrak{F}_0(P)\}$ . Damit ist  $\mathfrak{Z}(P) := \bigcup_{k=0}^{d-1} \mathfrak{Z}_k(P)$  eine disjunkte Zerlegung der Einheitssphäre:

$$\mathbb{S}^{d-1} = \bigcup_{\check{A} \in \mathfrak{Z}(P)} \check{A}.$$

Diese Zerlegung stimmt mit der Zerlegung von Lemma 2.4 (i) überein. Damit kann man diese Zerlegung allein aus Kenntnis der Funktion  $\xi_P$  gewinnen.

Ordnet man jeder eigentlichen Seite  $F \in \mathfrak{F}_*(P)$  die Menge  $\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}$  auf der Sphäre zu, so erhält man eine Bijektion  $\chi$  zwischen  $\mathfrak{F}_*(P)$  und  $\mathfrak{Z}(P)$  bzw. zwischen  $\mathfrak{F}_k(P)$  und  $\mathfrak{Z}_k(P)$  für  $k = 0, \dots, d-1$ .

**Satz 3.6:** Für zwei Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  gilt stets  $\xi_{P \oplus Q}(u) = \xi_P(u) + \xi_Q(u)$  für fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  bzgl.  $\sigma_{d-2}$  (bis auf höchstens  $(d-3)$ -dimensionale sphärische Polytope).

BEWEIS: Wir unterscheiden nach der Dimension der Seiten verschiedene Fälle.

**1. Fall:**  $\dim F_{P \oplus Q}(u) = 0$ .

Demzufolge ist  $F_{P \oplus Q}(u)$  eine Ecke und es gilt  $\xi_{P \oplus Q}(u) = 0$ . Damit müssen  $F_P(u)$  und  $F_Q(u)$  Ecken sein und wir erhalten  $\xi_{P \oplus Q}(u) = 0 = \xi_P(u) + \xi_Q(u)$ .

**2. Fall:**  $\dim F_{P \oplus Q}(u) = 1$ .

Ist  $F_{P \oplus Q}(u)$  eine Kante, so sind  $F_P(u)$  und  $F_Q(u)$  Ecken oder Kanten. Sind sowohl  $F_P(u)$  als auch  $F_Q(u)$  Kanten, so muss die Richtung der Kanten mit der Richtung der Kante  $F_{P \oplus Q}(u)$  übereinstimmen. Für die Länge der Kanten gilt dann  $\xi_{P \oplus Q}(u) = V_1(F_{P \oplus Q}(u)) = V_1(F_P(u)) + V_1(F_Q(u)) = \xi_P(u) + \xi_Q(u)$ . Ist eine der beiden Seiten  $F_P(u)$  oder  $F_Q(u)$  eine Ecke, also z. B.  $F_Q(u)$ , so ist  $V_1(F_Q(u)) = 0$  und  $V_1(F_{P \oplus Q}(u)) = V_1(F_P(u))$ . Deshalb gilt ebenfalls  $\xi_{P \oplus Q}(u) = \xi_P(u) + \xi_Q(u)$ .

**3. Fall:**  $\dim F_{P \oplus Q}(u) \geq 2$ .

Für jede Seite  $F \in \mathfrak{F}_k(P \oplus Q)$  ist  $\dim(\check{N}_F) = d - k$  und  $\dim(\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) = d - k - 1$ . Setzen wir  $F := F_{P \oplus Q}(u)$ , so gilt für die Dimension von  $\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}$  die Ungleichung  $\dim(\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}) \leq d - 3$ .  $\check{N}_F \cap \mathbb{S}^{d-1}$  ist folglich ein höchstens  $(d-3)$ -dimensionales offenes sphärisches Polytop, also eine Nullmenge bzgl.  $\sigma_{d-2}$ . q.e.d.

**Satz 3.7:** Ein Polytop  $Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ist genau dann ein Summand von  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , wenn  $\xi_Q(u) \leq \xi_P(u)$  für fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  bzgl.  $\sigma_{d-2}$  (bis auf höchstens  $(d-3)$ -dimensionale sphärische Polytope) gilt.

BEWEIS: Die Notwendigkeit der Bedingung folgt direkt aus Satz 3.6, da stets  $\xi_Q(u) \geq 0$  gilt.

Für die Hinlänglichkeit verwenden wir Lemma 3.21 und zeigen, dass  $Q$  frei in  $P$  gleitet. Sei  $\xi_Q(u) \leq \xi_P(u)$  für fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  bzgl.  $\sigma_{d-2}$ . Wir zeigen zunächst, dass es für jede Ecke  $x \in \text{vert } P$  einen Translationsvektor  $t \in \mathbb{E}^d$  gibt, sodass  $x \in Q + t \subseteq P$  gilt. Da  $x$  eine Ecke von  $P$  ist, gibt es einen Richtungsvektor  $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ , sodass  $x = F_P(v)$  gilt. Damit ist  $\chi(x) = \check{N}_{F_P(v)} \cap \mathbb{S}^{d-1} \in \mathfrak{Z}_0(P)$  ein offenes  $(d-1)$ -dimensionales sphärisches Polytop. Aus der Voraussetzung  $\xi_Q(u) \leq \xi_P(u)$  für fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  bzgl.  $\sigma_{d-2}$  folgt  $\check{N}_{F_P(v)} \cap \mathbb{S}^{d-1} \subseteq \check{N}_{F_Q(v)} \cap \mathbb{S}^{d-1} \in \mathfrak{Z}_0(Q)$ . Somit ist  $y := F_Q(v)$  eine Ecke von  $Q$ . Durch eine Translation um den Vektor  $t := x - y$  kann man stets erreichen, dass  $y$  auf  $x$  abgebildet wird. Deshalb sei hier o. B. d. A.  $x = y$  vorausgesetzt.

Jedes Polytop lässt sich als Durchschnitt seiner Stützhalbräume darstellen. Für  $P$  bzw.  $Q$  erhalten wir damit die Darstellungen

$$P = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} H_P^-(u) \quad \text{und} \quad Q = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} H_Q^-(u).$$

Sei nun  $w \in \mathbb{S}^{d-1}$  ein beliebiger Richtungsvektor. Dann genügt es zu zeigen, dass  $H_Q^-(w) \subseteq H_P^-(w)$ . Wir wollen noch voraussetzen, dass  $v$  so gewählt wurde, dass  $v$  und  $w$  nicht diametral zueinander liegen und dass  $\widehat{vw} \cap A = \emptyset$  für alle  $A \in \mathfrak{Z}_k(P)$  bzw.  $A \in \mathfrak{Z}_k(Q)$  ( $k \geq 2$ ). Der Bogen  $\widehat{vw}$  treffe demnach nur  $(d-1)$ - und  $(d-2)$ -dimensionale Polytope der Zerlegungen  $\mathfrak{Z}(P)$  und  $\mathfrak{Z}(Q)$ . Dies lässt sich stets erreichen, da  $v \in \check{N}_x \cap \mathbb{S}^{d-1}$  beliebig gewählt werden kann.

Dann ist für jedes  $u \in \widehat{vw}$  mit  $u \neq w$   $F_P(u)$  entweder eine Ecke oder eine Kante. Bezeichnen wir die Menge dieser Ecken und Kanten von  $P$  mit  $\tilde{\mathfrak{F}}(P) := \{F_P(u) : u \in \widehat{vw} \wedge u \neq w\}$ , so liegen für jede solche Kante  $A \in \tilde{\mathfrak{F}}(P) \cap \mathfrak{F}_1(P)$  auch die beiden Ecken von  $A$  in  $\tilde{\mathfrak{F}}(P)$ . Die Ecken aus  $\tilde{\mathfrak{F}}(P)$  können wir zu einer Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  ordnen, sodass die Kanten  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mit  $A_i := \overline{x_{i-1}x_i}$  einen zusammenhängenden Kantenzug bilden. Diesen können wir ebenso durch die Kantenvektoren  $\vec{a}_i := x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) beschreiben. Dabei ist  $x_0 = x$  und  $x_n$  ist eine Ecke der Seite  $F_P(w)$ .

Da der Winkel zwischen den Vektoren  $w$  und  $\vec{a}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) stets kleiner als  $\frac{\pi}{2}$  ist, gilt für das Skalarprodukt  $\langle \vec{a}_i, w \rangle > 0$ . Da  $x_n$  eine Ecke von  $F_P(w)$  ist, gilt für die Stützfunktion  $h_P(w) = \langle x_n, w \rangle$  und  $H_P^-(w)$  hat die Darstellung  $H_P^-(w) := \{z \in \mathbb{E}^d : \langle z, w \rangle \leq \langle x_n, w \rangle\}$ .

Die Ecken  $x_1, \dots, x_n$  besitzen nun Darstellungen  $x_i = F_P(v_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mit geeigneten Richtungsvektoren  $v_1, \dots, v_n \in \widehat{vw}$ . Weiter setzen wir  $v_0 := v$ . Dann ist  $y_i := F_Q(v_i)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) stets eine Ecke von  $Q$ . Speziell ist also  $y_0 = y (= x)$ . Aus der Voraussetzung  $\xi_Q(u) \leq \xi_P(u)$  mit Ausnahme höchstens  $(d-3)$ -dimensionale sphärischer Polytope folgt, dass jede Kante in  $\tilde{\mathfrak{F}}(Q) := \{F_Q(u) : u \in \widehat{vw} \wedge u \neq w\}$  auch einer Kante in  $\tilde{\mathfrak{F}}(P)$  entspricht. Die einander entsprechenden Kanten können allerdings unterschiedliche Längen besitzen. Außerdem kann es in  $\tilde{\mathfrak{F}}(P)$  weitere Kanten geben.

Da für jede Richtung  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  für die  $F_P(u)$  eine Ecke von  $P$  ist, auch  $F_Q(u)$  eine Ecke von  $Q$  ist, gilt  $N_{F_P(u)} \subseteq N_{F_Q(u)}$ . Damit sind durch  $y_0, \dots, y_n$  alle Ecken aus  $\tilde{\mathfrak{F}}(Q)$  erfasst. Allerdings können durchaus einige der  $y_0, \dots, y_n$  zusammenfallen. Definieren wir wieder  $B_i := \overline{y_{i-1}y_i}$  für  $i = 1, \dots, n$ , so erhalten wir einen Kantenzug  $B_1, \dots, B_n$  zwischen den Ecken  $y = y_0$  und  $y_n \in \text{vert } F_Q(w)$ . Allerdings können einige der Kanten  $B_1, \dots, B_n$  zu einzelnen Punkten entartet sein. Für die Länge der Kanten gilt jedoch stets  $V_1(A_i) \geq V_1(B_i)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Damit gibt es Faktoren  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ , sodass  $V_1(B_i) = \lambda_i \cdot V_1(A_i)$  gilt. Bezeichnen wir die Kantenvektoren mit  $\vec{b}_i := y_i - y_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), so gilt entsprechend  $\vec{b}_i = \lambda_i \cdot \vec{a}_i$ . Da  $y_n$  eine Ecke von  $F_Q(w)$  ist, gilt für die Stützfunktion  $h_Q(w) = \langle y_n, w \rangle$  und  $H_Q^-(w)$  hat die Darstellung  $H_Q^-(w) := \{z \in \mathbb{E}^d : \langle z, w \rangle \leq \langle y_n, w \rangle\}$ . Für  $x_n$  und  $y_n$  haben wir die Darstellungen

$x_n = x_0 + \vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_n$  und  $y_n = y_0 + \vec{b}_1 + \cdots + \vec{b}_n$ . Da das Skalarprodukt  $\langle \vec{a}_i, w \rangle$  für  $i = 1, \dots, n$  stets größer als Null ist, gilt

$$\begin{aligned} \langle y_n, w \rangle &= \langle y_0 + \vec{b}_1 + \cdots + \vec{b}_n, w \rangle \\ &= \langle y_0, w \rangle + \langle \vec{b}_1, w \rangle + \cdots + \langle \vec{b}_n, w \rangle \\ &= \langle y_0, w \rangle + \lambda_1 \langle \vec{a}_1, w \rangle + \cdots + \lambda_n \langle \vec{a}_n, w \rangle \\ &\leq \langle x_0, w \rangle + \langle \vec{a}_1, w \rangle + \cdots + \langle \vec{a}_n, w \rangle \\ &= \langle x_0 + \vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_n, w \rangle = \langle x_n, w \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist  $H_Q^-(w) \subseteq H_P^-(w)$ . Da  $w \in \mathbb{S}^{d-1}$  ein beliebiger Richtungsvektor war, gilt  $x \in Q \subseteq P$  bzw. im allgemeinen Fall  $x \in Q + t \subseteq P$ .

Sei nun  $x \in \text{bd } P$  ein beliebiger Randpunkt. Dann lässt sich  $x$  stets als Konvexkombination von Eckpunkten  $x_1, \dots, x_k \in P$  darstellen:  $x = \sum_{i=1}^k \kappa_i x_i$  für gewisse Koeffizienten  $\kappa_1, \dots, \kappa_k \in [0, 1]$  mit  $\sum_{i=1}^k \kappa_i = 1$ . Für jeden Eckpunkt  $x_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) gibt es nun einen Translationsvektor  $t_i$ , sodass  $x_i \in Q + t_i \subseteq P$  gilt. Damit erhalten wir  $x = \sum_{i=1}^k \kappa_i x_i \in \bigoplus_{i=1}^k \kappa_i (Q + t_i) \subseteq \bigoplus_{i=1}^k \kappa_i P$ . Es gilt nun  $\bigoplus_{i=1}^k \kappa_i (Q + t_i) = \bigoplus_{i=1}^k \kappa_i Q + \sum_{i=1}^k \kappa_i t_i = Q + \sum_{i=1}^k \kappa_i t_i$  und  $\bigoplus_{i=1}^k \kappa_i P = P$ . Setzen wir noch  $t := \sum_{i=1}^k \kappa_i t_i$ , so erhalten wir  $x \in Q + t \subseteq P$ . Damit gleitet  $Q$  frei in  $P$ . q.e.d.

**Bemerkung 3.13:** Ein ähnliches Kriterium wird in [Grü, S. 318] angegeben. Dort spielen neben den Kantenlängen die Dimensionen der Seiten eine Rolle. Genauer gilt (in etwas anderer Formulierung): *Ein Polytop  $Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  ist genau dann ein Summand von  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , wenn die beiden Bedingungen*

- ( $\alpha$ )  $V_1(F_Q(u)) \leq V_1(F_P(u))$  für alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  mit  $F_P(u) \in \mathfrak{F}_1(P)$  und  $F_Q(u) \in \mathfrak{F}_1(Q)$ ,
- ( $\beta$ )  $\dim(F_Q(u)) \leq \dim(F_P(u))$  für alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$

erfüllt sind.

Wie wir gleich sehen werden, ist jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  durch die Funktion  $\xi_P$  bis auf Translationen eindeutig bestimmt.

**Satz 3.8:** *Für konvexe Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1)  $\xi_P(u) = \xi_Q(u)$  für fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  bzgl.  $\sigma_{d-2}$ ,
- (2)  $\xi_P(u) = \xi_Q(u)$  für alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,
- (3)  $P \stackrel{\mathcal{T}}{=} Q$ .

**BEWEIS:** (3)  $\implies$  (2) : Sind  $P$  und  $Q$  translationsgleich, so stimmen einerseits die Normalenkegel einander entsprechender Seiten überein und andererseits haben einander entsprechende Kanten die gleiche Länge. Somit gilt  $\xi_P(u) = \xi_Q(u)$  für alle Richtungen  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ .

(2)  $\implies$  (1) : Trivial.

(1)  $\implies$  (3) : Sei nun  $\xi_P(u) = \xi_Q(u)$  für fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  bzgl.  $\sigma_{d-2}$ . Dann ist nach Satz 3.7 sowohl  $P$  ein Summand von  $Q$ , als auch  $Q$  ein Summand von  $P$ . Dementsprechend gibt es Polytope  $R, S \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , sodass einerseits  $Q = P \oplus R$  und andererseits  $P = Q \oplus S$  gilt. Damit erhalten wir  $P = P \oplus R \oplus S$ . Folglich ist  $R \oplus S = \{o\}$ . Daher müssen auch  $R$  und  $S$  einpunktige Mengen sein.  $P$  und  $Q$  sind demnach translationsgleich. q.e.d.

**Bemerkung 3.14:** Satz 3.8 stellt in gewisser Weise ein Analogon zu einem Satz von Minkowski [Min] dar. Dieser lautet: *Zwei konvexe Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}_d(\mathbb{E}^d)$  mit paarweise parallelen und volumengleichen  $(d-1)$ -dimensionalen Seiten sind translationsgleich.*

Führt man nun in Analogie zu Definition 3.11 für jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  eine Funktion  $\eta_P : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\eta_P(u) := \begin{cases} V_{d-1}(F_P(u)) & : F_P(u) \in \mathfrak{F}_{d-1}(P), \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

ein, so wird die Analogie zu Satz 3.8 besonders deutlich:

*Zwei eigentliche konvexe Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}_d(\mathbb{E}^d)$  sind genau dann translationsgleich, wenn  $\eta_P(u) = \eta_Q(u)$  für alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  gilt.*

In diesem Fall macht die Unterscheidung zwischen „für alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ “ und „für fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  bzgl.  $\sigma_0$ “ keinen Sinn, da  $\sigma_0$  das Zählmaß ist und damit Aussagen, die für fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  bzgl.  $\sigma_0$  gelten stets für alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  gelten.

Den äußeren Normaleneinheitsvektoren der Seitenflächen im Satz von Minkowski entsprechen im Satz 3.8 die offenen Normalenkegel der Kanten und den  $(d-1)$ -dimensionalen Volumina entsprechen die Kantenlängen. Im Gegensatz zum Satz 3.8, der auch für uneigentliche Polytope richtig ist, gilt der Satz von Minkowski nur für eigentliche Polytope. dass diese Einschränkung notwendig ist kann man sich leicht überlegen. Jedes  $(d-1)$ -dimensionale Polytop  $P$  im  $\mathbb{E}^d$  liegt in einer  $(d-1)$ -dimensionalen Hyperebene  $H$ . Damit besitzt  $P$  genau zwei Normalenrichtungen von Seitenflächen. Diese entsprechen den beiden Normalenrichtungen der Hyperebene  $H$ . Für alle Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}_{d-1}(\mathbb{E}^d)$  mit  $V_{d-1}(P) = V_{d-1}(Q)$ , die in derselben Hyperebene  $H$  liegen, gilt deshalb  $\eta_P = \eta_Q$ . Gilt für  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  sogar  $\dim P < d-1$ , dann ist stets  $\eta_P \equiv 0$ .

Da bei der Minkowskisumme zweier Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  neue Seitenflächen entstehen können, die Normalenrichtungen besitzen, die weder Normalenrichtungen von Seitenflächen von  $P$  noch solche von  $Q$  sind, kann die Funktion  $\eta_P$  nicht Minkowski-additiv sein. Als einfachstes Beispiel betrachte man die Minkowskisumme zweier nicht paralleler Strecken im  $\mathbb{E}^3$ . Das entstehende Parallelogramm besitzt natürlich eine Seitenfläche, die bei den Strecken nicht vorhanden ist. Hier haben wir nun zwei uneigentliche Polytope addiert. Man kann aber auch leicht Beispiele mit eigentlichen Polytopen konstruieren. Damit kann es für  $\eta_P$  keine Analoga zu den Sätzen 3.6 und 3.7 geben.

Nun hat Minkowski in [Min] nicht nur die Eindeutigkeit von Polytopen mit vorgegebenen Richtungen und Flächeninhalten der Seitenflächen gezeigt. Er hat auch den folgenden Existenzsatz bewiesen, den wir hier mit Hilfe der Funktion  $\eta_P$  angeben:

Es sei  $\chi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Für  $W_\chi := \{u \in \mathbb{S}^{d-1} : \chi(u) > 0\}$  gelte  $|W_\chi| < \infty$  und  $\text{aff}(W_\chi) = \mathbb{E}^d$ . Außerdem sei

$$\sum_{u \in W_\chi} \chi(u)u = o.$$

Dann existiert ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}_d(\mathbb{E}^d)$ , sodass  $\chi = \eta_P$  gilt.

Damit erhebt sich die Frage, ob ein solcher Existenzsatz auch für  $\xi_P$  gilt. Diese Frage muss vorläufig offen bleiben.

**Problem 1:** Es sei  $\chi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Unter welchen Bedingungen gibt es ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , sodass  $\chi = \xi_P$  gilt?

Die Beobachtung der Analogie zwischen Satz 3.8 und dem Satz von Minkowski regt dazu an, die Definition 3.11 zu verallgemeinern.

**Definition 3.12:** Für jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  und für  $k = 1, \dots, d-1$  definieren wir eine Funktion  $\psi_P^k : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\psi_P^k(u) := \begin{cases} V_k(F_P(u)) & : F_P(u) \in \mathfrak{F}_k(P), \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist  $\psi_P^1 = \xi_P$  und  $\psi_P^{d-1} = \eta_P$ . Man kann jetzt wieder fragen, ob es für  $\psi_P^k$  Analoga zu den Sätzen 3.6–3.8 gibt. Wie für  $\eta_P$  kann man sich hier leicht überlegen, dass  $\psi_P^k$  für  $k > 1$  nicht Minkowski-additiv sein kann. Infolge dessen kann es für  $\psi_P^k$  keine zu den Sätzen 3.6 und 3.7 analogen Aussagen geben. Damit kann auch die hier verwendete Beweisstrategie von Satz 3.8 nicht angewendet werden. Der Satz von Minkowski zeigt allerdings, dass ganz andere Beweisstrategien zum Erfolg führen können. Die Frage, ob es für  $\psi_P^k$  für  $k = 2, \dots, d-2$  ein Analogon zu Satz 3.8 bzw. zum Satz von Minkowski gibt, muss deshalb vorläufig offen bleiben.

**Problem 2:** (i) Es sei  $1 < k < d-1$  und  $P, Q \in \mathfrak{P}_d(\mathbb{E}^d)$  und es gelte  $\psi_P^k(u) = \psi_Q^k(u)$  für alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Sind  $P$  und  $Q$  dann translationsgleich?

(ii) Es sei  $\chi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $k \in \mathbb{N}$  mit  $1 < k < d-1$ . Unter welchen Bedingungen gibt es ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , sodass  $\chi = \psi_P^k$  gilt?

### 3.2.3. Abschwächungen der Zerlegungsgleichheit

In der klassischen Zerlegungstheorie spielen verschiedene Abschwächungen der Zerlegungsgleichheit eine Rolle (vgl. etwa [He3] und [Ha1]). Sinngemäß werden die entsprechenden Definitionen auf den Fall der Minkowskischen Zerlegungsgleichheit übertragen.

**Definition 3.13:**

(a) Zwei konvexe Mengen  $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  heißen *ergänzungsgleich*

$$A \stackrel{e}{=} B : \Longleftrightarrow \bigvee_{A', B' \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)} \left( A' \stackrel{z}{=} B' \wedge A \oplus A' \stackrel{z}{=} B \oplus B' \right).$$

(b) Zwei konvexe Mengen  $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  heißen *ergänzungsäquivalent*

$$A \stackrel{e}{\approx} B : \Longleftrightarrow \bigvee_{A', B' \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)} \left( A' \stackrel{z}{=} B' \wedge A \oplus A' \cong B \oplus B' \right).$$

(c) Zwei konvexe Mengen  $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  heißen *ergänzungsidentisch*

$$A \stackrel{e}{\equiv} B : \Longleftrightarrow \bigvee_{A', B' \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)} \left( A' \stackrel{z}{=} B' \wedge A \oplus A' = B \oplus B' \right).$$

(d) Zwei konvexe Mengen  $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  heißen *mehrfach zerlegungsgleich*

$$A \stackrel{m}{=} B : \Longleftrightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{C_1, \dots, C_n \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)} \left( A \stackrel{z}{=} C_1 \wedge C_1 \stackrel{z}{=} C_2 \wedge \dots \wedge C_n \stackrel{z}{=} B \right).$$

(e) Zwei konvexe Mengen  $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  heißen *selbst-ergänzungsgleich*

$$A \stackrel{s}{=} B : \Longleftrightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)} \bigvee_{B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)} \left( A_i \cong A, \right. \\ \left. B_i \cong B \quad (i = 1, \dots, n) \wedge \bigoplus_{i=1}^n A_i \stackrel{z}{=} \bigoplus_{i=1}^n B_i \right).$$

Es zeigt sich nun, dass die drei Ergänzungsrelationen (a),(b) und (c) zusammenfallen.

**Satz 3.9:** Für konvexe Mengen  $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  sind folgende Aussagen äquivalent:

(1)  $A \stackrel{e}{=} B$ ,

(2)  $A \stackrel{e}{\approx} B$ ,

(3)  $A \stackrel{e}{\equiv} B$ .

BEWEIS: Die beiden Implikationen (3)  $\implies$  (2) und (2)  $\implies$  (1) sind trivial. Es ist also lediglich die Implikation (1)  $\implies$  (3) zu zeigen. Seien also  $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  zwei konvexe Mengen mit  $A \stackrel{e}{=} B$ . Dann gibt es nach Definition 3.13 (a) zwei konvexe Mengen  $A', B' \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$ , sodass  $A' \stackrel{z}{=} B'$  und  $A \oplus A' \stackrel{z}{=} B \oplus B'$  gelten. Dann definieren wir  $\tilde{A} := A' \oplus B \oplus B'$  und  $\tilde{B} := B' \oplus A \oplus A'$ . Aus der Symmetrie und dem Additionssatz für die Zerlegungsgleichheit folgt  $\tilde{A} \stackrel{z}{=} \tilde{B}$ . Außerdem erhält man  $A \oplus \tilde{A} = A \oplus A' \oplus B \oplus B' = B \oplus B' \oplus A \oplus A' = B \oplus \tilde{B}$ . Somit gilt  $A \stackrel{e}{\equiv} B$ . q.e.d.



Es ist klar, dass die Mehrfach-Zerlegungsgleichheit transitiv ist, und dementsprechend eine Kongruenzrelation ist. Für die Polygone der euklidischen Ebene lassen sich nun sehr einfach notwendige und hinreichende Bedingungen für die einzelnen Zerlegungsrelationen angeben. Es zeigt sich, dass alle Relationen aus Definition 3.13 zusammenfallen. Diese können allein durch die mittlere Breite charakterisiert werden.

**Satz 3.10:** *Für konvexe Polygone  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^2)$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1)  $P \stackrel{e}{=} Q$ ,
- (2)  $P \stackrel{e}{\approx} Q$ ,
- (3)  $P \stackrel{e}{\equiv} Q$ ,
- (4)  $P \stackrel{m}{\equiv} Q$ ,
- (5)  $P \stackrel{s}{\equiv} Q$ ,
- (6)  $b(P) = b(Q)$ .

BEWEIS: Die Äquivalenz der ersten drei Aussagen folgt direkt aus Satz 3.9. Wir zeigen nun, dass die Gleichheit der mittleren Breite jeweils notwendige und hinreichende Bedingung für die einzelnen Zerlegungsrelationen ist.

(4)  $\iff$  (6) : Die Notwendigkeit der Aussage (6) ergibt sich direkt aus Satz 3.1. Der Beweis der Umkehrung erfolgt mittels Zentralsymmetrisierung von  $P$  und  $Q$ .

Sei  $b(P) = b(Q)$ .  $P$  lässt sich immer darstellen als  $P = \frac{1}{2}P \oplus \frac{1}{2}P$ . Auf einen der Summanden wenden wir jetzt eine Zentralspiegelung  $\sigma$  am Ursprung  $o$  an, also  $\sigma(x) := -x$  ( $x \in \mathbb{E}^2$ ). Es ergibt sich  $R_1 := \frac{1}{2}P \oplus \sigma(\frac{1}{2}P)$  und  $P \stackrel{z}{=} R_1$ . Genauso zerlegen wir  $Q$  in  $Q = \frac{1}{2}Q \oplus \frac{1}{2}Q$  und wenden wiederum  $\sigma$  auf einen der Summanden an. Es ergibt sich  $R_2 := \frac{1}{2}Q \oplus \sigma(\frac{1}{2}Q)$  und  $Q \stackrel{z}{=} R_2$ . Außerdem sind  $R_1$  und  $R_2$  zentralsymmetrisch. Deshalb lassen sie sich als Minkowskisumme von Strecken darstellen:

$$R_1 = \bigoplus_{i=1}^k S_i, \quad \text{wobei } S_1, \dots, S_k \text{ Strecken sind und}$$

$$R_2 = \bigoplus_{j=1}^l T_j, \quad \text{wobei } T_1, \dots, T_l \text{ ebenfalls Strecken sind.}$$

Damit sind  $R_1$  und  $R_2$  jeweils zerlegungsgleich zu Strecken  $S$  bzw.  $T$ . Da  $P$  und  $Q$  die gleiche mittlere Breite haben, müssen  $S$  und  $T$  ebenfalls die gleiche mittlere Breite besitzen. Damit sind also  $S$  und  $T$  kongruent. Wir haben nun folgende Kette zerlegungsgleicher Polygone:  $P \stackrel{z}{=} R_1 \stackrel{z}{=} S \cong T \stackrel{z}{=} R_2 \stackrel{z}{=} Q$ . Entsprechend sind  $P$  und  $Q$  mehrfach zerlegungsgleich.

- (5)  $\iff$  (6) : Sind  $P$  und  $Q$  selbst-ergänzungsgleich, so gibt es Polygone  $P_1, \dots, P_n$  und  $Q_1, \dots, Q_n$ , die jeweils kongruent zu  $P$  bzw.  $Q$  sind, sodass gilt:  $\bigoplus_{i=1}^n P_i \stackrel{z}{=} \bigoplus_{i=1}^n Q_i$ . Damit gilt wegen Satz 3.1 weiterhin  $b(\bigoplus_{i=1}^n P_i) = b(\bigoplus_{i=1}^n Q_i)$ . Da alle  $P_i$  bzw.  $Q_i$  jeweils zu  $P$  bzw.  $Q$  kongruent sind, ergibt sich, dass  $n \cdot b(P) = n \cdot b(Q)$  und somit  $b(P) = b(Q)$ .

Sei nun umgekehrt  $b(P) = b(Q)$ .  $\sigma$  sei wieder die Zentralspiegelung am Ursprung  $o$ . Jetzt definieren wir  $P_1 := P, P_2 := \sigma(P), Q_1 := Q$  und  $Q_2 := \sigma(Q)$ . Dann sind  $P_1 \oplus P_2$  und  $Q_1 \oplus Q_2$  zentralsymmetrisch. Sie lassen sich somit als Minkowskisumme von Strecken darstellen. Da  $P$  und  $Q$  die gleiche mittlere Breite besitzen, gilt  $P_1 \oplus P_2 \stackrel{z}{=} Q_1 \oplus Q_2$ ; also ist  $P \stackrel{s}{=} Q$ .

- (1)  $\iff$  (6) : dass die Gleichheit der mittleren Breite eine notwendige Bedingung für die Ergänzungsgleichheit ist ergibt sich wieder sofort aus Satz 3.1.

Es seien nun wiederum  $P$  und  $Q$  zwei Polygone mit gleicher mittlerer Breite. Dann ist  $\sigma(P)$  offensichtlich zerlegungsgleich zu  $\frac{1}{2}P \oplus \sigma(\frac{1}{2}P)$  und entsprechend ist  $\sigma(Q)$  zerlegungsgleich zu  $\frac{1}{2}Q \oplus \sigma(\frac{1}{2}Q)$ . Wir definieren nun  $P' := \sigma(P) \oplus \frac{1}{2}Q \oplus \sigma(\frac{1}{2}Q)$  und  $Q' := \sigma(Q) \oplus \frac{1}{2}P \oplus \sigma(\frac{1}{2}P)$ . Damit gilt nun  $P' \stackrel{z}{=} Q'$ . Nun sind  $P \oplus P' = P \oplus \sigma(P) \oplus \frac{1}{2}Q \oplus \sigma(\frac{1}{2}Q)$  und  $Q \oplus Q' = Q \oplus \sigma(Q) \oplus \frac{1}{2}P \oplus \sigma(\frac{1}{2}P)$  jeweils zentralsymmetrisch. Folglich lassen sie sich wieder in Strecken zerlegen. Da  $P$  und  $Q$  die gleiche mittlere Breite besitzen, gilt  $P \oplus P' \stackrel{z}{=} Q \oplus Q'$ . Somit sind  $P$  und  $Q$  ergänzungsgleich. q.e.d.

**Bemerkung 3.15:** (i) Aus dem Beweis können wir entnehmen, dass bei der Definition der Mehrfach-Zerlegungsgleichheit in Definition 3.13(d) sogar  $n = 3$  genügt. Ebenso könnten wir uns bei der Definition der Selbstergänzungsgleichheit in 3.13(e) auf  $n = 2$  beschränken.

- (ii) In der klassischen Zerlegungstheorie spielen ein Subtraktions- und ein Divisionsatz eine wichtige Rolle (vgl. etwa [Ha2, S. 21]). Entsprechende analoge Aussagen gelten für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit nicht, da es konvexe Polygone mit gleicher mittlerer Breite gibt, die nicht zerlegungsgleich sind. Allerdings gelten für die Mehrfach-Zerlegungsgleichheit entsprechende Sätze:

**Folgerung 3.11:** *Für konvexe Polygone der euklidischen Ebene gilt für die Mehrfach-Zerlegungsgleichheit folgender Subtraktions- bzw. Divisionssatz:*

$$\bigwedge_{P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^2)} \left( P_1 \oplus P_2 \stackrel{m}{=} Q_1 \oplus Q_2 \wedge P_2 \stackrel{m}{=} Q_2 \implies P_1 \stackrel{m}{=} Q_1 \right). \quad (\text{Sub}_{\underline{m}})$$

$$\bigwedge_{\substack{P, P_1, \dots, P_n, \\ Q, Q_1, \dots, Q_n \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^2)}} \left( P_i \cong P, Q_i \cong Q \ (i = 1, \dots, n) \wedge \bigoplus_{i=1}^n P_i \stackrel{m}{=} \bigoplus_{i=1}^n Q_i \implies P \stackrel{m}{=} Q \right). \quad (\text{Div}_{\underline{m}})$$

BEWEIS: Der Subtraktionssatz folgt aus der Äquivalenz von Ergänzungsgleichheit und Mehrfach-Zerlegungsgleichheit und der Divisionssatz entsprechend aus der Äquivalenz von Selbstergänzungsgleichheit und Mehrfach-Zerlegungsgleichheit. q.e.d.

Bisher noch ungeklärt ist die Frage, ob sich die Ergebnisse von Satz 3.10 auf höhere Dimensionen übertragen lässt. Die Frage lässt sich in zwei Teilprobleme aufspalten.

**Problem 3:** (i) Gilt die Äquivalenz der fünf Zerlegungsrelationen aus Definition 3.13 ebenso für Polytope in höheren Dimensionen ( $d \geq 3$ )?

(ii) Ist die Gleichheit der mittleren Breite und der weiteren in Abschnitt 3.1.4 gefundenen notwendigen Bedingungen der Gleichheit der Funktionale  $E_{f_1, \dots, f_n}^d$  bzw.  $G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}$  hinreichend für die Mehrfach-Zerlegungsgleichheit (bzw. der anderen Zerlegungsrelationen)?

Offen ist weiterhin die Frage, ob sich die entsprechenden Aussagen auf konvexe Mengen übertragen lassen, die keine Polygone sind. Auf jeden Fall kommen weitere notwendige Bedingungen hinzu, da Polygone nur mit Polygonen zerlegungsgleich sein können.

**Problem 4:** (i) Gilt die Äquivalenz der fünf Zerlegungsrelationen aus Definition 3.13 allgemein für konvexe Mengen?

(ii) Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen für die Mehrfach-Zerlegungsgleichheit nichtpolygonaler konvexer Mengen an.

### 3.3. Klassifikation zerlegungsgleicher Polytope

Wir wollen nun wieder zur direkten Zerlegungsgleichheit zurück kommen. Die Idee dabei ist, jedes Polytop in unzerlegbare Summanden zu zerlegen. Wir nutzen sozusagen die Menge aller unzerlegbaren Polytope des  $\mathbb{E}^d$  als eine Art Baukastensystem, aus dem wir alle anderen Polytope zusammensetzen können. Allerdings ist diese Zerlegung in unzerlegbare Summanden im allgemeinen nicht eindeutig. Es gibt also verschiedene Mengen von Bausteinen, aus denen man das selbe Polytop zusammensetzen kann. Das hängt damit zusammen, dass die Minkowskische Zerlegungsgleichheit nicht transitiv ist. Lassen sich nun zwei Polytope aus derselben Menge von Bausteinen zusammensetzen, so sind sie offensichtlich auch zerlegungsgleich. Daraus sollen dann weiter notwendige und hinreichende Bedingungen abgeleitet werden.

**Definition 3.14:** Es bezeichne  $\mathfrak{U} := \{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) : P \text{ unzerlegbar} \wedge \dim P \geq 1\}$  die Menge aller unzerlegbaren Polytope des  $\mathbb{E}^d$ , ausgenommen die einpunktigen Mengen. Weiter sei für  $i \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{T}_i := \left\{ \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{U} : |\mathfrak{T}| = i \wedge \bigwedge_{U, V \in \mathfrak{T}} (U \neq V \implies U \not\sim V) \right\}$$

die Menge aller  $i$ -elementigen Teilmengen von  $\mathfrak{U}$ , wobei die einzelnen Polytope untereinander nicht ähnlich sein dürfen. Dabei ist auch  $i = 0$  zugelassen, insbesondere ist dann  $\mathbb{T}_0 = \{\emptyset\}$ .

In diesem Zusammenhang definieren wir noch die Minkowskissumme über der leeren Menge. Das kann natürlich nur das neutrale Element der Minkowskischen Addition sein:

$$\bigoplus_{U \in \emptyset} U := \{o\}.$$

Die einzelnen  $\mathfrak{T} \in \mathbb{T}_n$  wollen wir *Zerlegungstypen* nennen. Die Gesamtheit aller Zerlegungstypen bezeichnen wir dann mit  $\mathbb{T} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{T}_i$ .

Jetzt werden wir noch den Begriff der Kongruenz von Polytopen auf Zerlegungstypen übertragen. Für  $\mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_n\}, \mathfrak{T} = \{T_1, \dots, T_n\} \in \mathbb{T}_n$  definieren wir dazu

$$\mathfrak{S} \cong \mathfrak{T} : \Longleftrightarrow S_i \cong T_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

für eine geeignete Nummerierung der  $S_i$  bzw.  $T_i$ .

Auf  $\mathbb{T}$  kann man nun in natürlicher Weise zwei Operationen einführen. Zunächst kann man eine Multiplikation mit nichtnegativen reellen Zahlen definieren. Für einen Zerlegungstyp  $\mathfrak{T} = \{T_1, \dots, T_n\} \in \mathbb{T}_n$  und eine reelle Zahl  $\lambda \geq 0$  definieren wir dazu  $\lambda \cdot \mathfrak{T} := \{\lambda \cdot T_1, \dots, \lambda \cdot T_n\}$ .

Als zweite Operation führen wir eine Addition ein. Besitzen die beiden Zerlegungstypen  $\mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_n\} \in \mathbb{T}_n$  und  $\mathfrak{T} = \{T_1, \dots, T_m\} \in \mathbb{T}_m$  keine Teile, die ähnlich zu einander sind, so ist die Summe von  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{T}$  einfach die Vereinigung der beiden Mengen: Gilt für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, m$   $S_i \not\cong T_j$ , so ist  $\mathfrak{S} + \mathfrak{T} := \mathfrak{S} \cup \mathfrak{T}$ .

Gibt es jedoch Teile, die zueinander ähnlich sind, so müssen wir diese Teile zu einem Teil zusammenfassen, da Zerlegungstypen keine zueinander ähnliche Teile enthalten dürfen. Wir nehmen an, es gibt jeweils  $k$  Teile aus  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{T}$ , die zueinander ähnlich sind. Durch eine geeignete Nummerierung der Teile aus  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{T}$  kann man erreichen, dass  $S_i \cong T_i$  für  $i = 1, \dots, k$  gilt. Dann gibt es Streckungsfaktoren  $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  und euklidische Bewegungen  $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathcal{B}_d$ , sodass  $S_i = \lambda_i \cdot \beta_i(T_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) gilt. Wir definieren nun

$$\mathfrak{S} + \mathfrak{T} := \{S_1 \oplus \beta_1(T_1), \dots, S_k \oplus \beta_k(T_k), S_{k+1}, \dots, S_n, T_{k+1}, \dots, T_m\}. \quad (*)$$

Außerdem wollen wir noch jedem Zerlegungstypen eine Familie von Polytopen zuordnen. Dazu definieren wir für  $\mathfrak{T} = \{T_1, \dots, T_n\} \in \mathbb{T}_n$ :

$$\overline{\mathfrak{T}} := \left\{ P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) : P \cong \bigoplus_{i=1}^n P_i \wedge P_i \stackrel{z}{\cong} T_i \quad (i = 1, \dots, n) \right\}. \quad (**)$$

$\overline{\mathfrak{T}}$  nennen wir *Zerlegungsklasse* des Zerlegungstyps  $\mathfrak{T}$ . Die Menge aller Zerlegungsklassen fassen wir wieder zu einer Menge  $\mathbb{V} := \{\overline{\mathfrak{T}} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) : \mathfrak{T} \in \mathbb{T}\}$  zusammen. Die beiden Operationen  $\cdot$  und  $+$  übertragen sich natürlich durch  $\lambda \cdot \overline{\mathfrak{T}} := \overline{\lambda \cdot \mathfrak{T}}$  und  $\overline{\mathfrak{S}} + \overline{\mathfrak{T}} := \overline{\mathfrak{S} + \mathfrak{T}}$  für  $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathbb{T}$  und  $\lambda \geq 0$  auf Zerlegungsklassen. Wie üblich übertragen sich diese beiden Operationen auf die Potenzmenge  $2^{\mathbb{V}}$ .

**Lemma 3.22:**  $(\mathbb{V}, +)$  ist eine kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel. Das Nullelement ist  $\bar{\emptyset} = \{\{x\} : x \in \mathbb{E}^d\}$ .

BEWEIS: Es seien  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathbb{T}$ . Enthalten  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{T}$  keine zueinander ähnliche Teile, so entspricht die Summe der Vereinigung von  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{T}$  und es gilt die Assoziativität. Gilt hingegen  $R \simeq S \simeq T$  für  $R \in \mathfrak{R}, S \in \mathfrak{S}$  und  $T \in \mathfrak{T}$ , so gibt es entsprechende Koeffizienten  $\lambda, \mu > 0$  und Bewegungen  $\beta, \gamma \in \mathcal{B}_d$ , sodass  $R = \lambda \cdot \beta(S)$  und  $S = \mu \cdot \gamma(T)$  gilt. Damit ist nach Definition 3.14  $R \oplus \beta(S) \in \mathfrak{R} + \mathfrak{S}$  und  $(R \oplus \beta(S)) \oplus \beta(\gamma(T)) \in (\mathfrak{R} + \mathfrak{S}) + \mathfrak{T}$ . Andererseits gilt  $S \oplus \gamma(T) \in \mathfrak{S} + \mathfrak{T}$  und  $R \oplus \beta(S \oplus (\gamma(T))) \in \mathfrak{R} + (\mathfrak{S} + \mathfrak{T})$ . Da  $(R \oplus \beta(S)) \oplus \beta(\gamma(T)) = R \oplus \beta(S \oplus (\gamma(T)))$ , gilt weiterhin  $(\mathfrak{R} + \mathfrak{S}) + \mathfrak{T} = \mathfrak{R} + (\mathfrak{S} + \mathfrak{T})$ . Enthalten nur zwei der drei Zerlegungstypen  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathbb{T}$  zueinander ähnliche Teile, so erhält man die Assoziativität von  $(\mathbb{T}, +)$  aus analogen Überlegungen. Da es sich bei der Abbildung  $- : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{V}$  um einen Homomorphismus handelt, überträgt sich die Assoziativität auf  $(\mathbb{V}, +)$ .

Enthalten  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{T}$  keine zueinander ähnliche Teile, so gilt offensichtlich  $\mathfrak{S} + \mathfrak{T} = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{T} = \mathfrak{T} \cup \mathfrak{S} = \mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ . Es seien nun  $S \in \mathfrak{S}$  und  $T \in \mathfrak{T}$  zwei zueinander ähnliche Polytope. Infolge dessen gibt es wieder einen Koeffizienten  $\lambda > 0$  und eine Bewegung  $\beta \in \mathcal{B}_d$ , sodass  $S = \lambda \cdot \beta(T)$  gilt. Damit ist nach Definition 3.14  $S \oplus \beta(T) \in \mathfrak{S} + \mathfrak{T}$  und  $T \oplus \beta^{-1}(S) \in \mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ . Da  $S \oplus \beta(T)$  und  $T \oplus \beta^{-1}(S)$  kongruent zueinander sind, gilt auch für die Zerlegungstypen  $\mathfrak{S} + \mathfrak{T} \cong \mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ . Somit gilt für die zugehörigen Zerlegungsklassen  $\bar{\mathfrak{S}} + \bar{\mathfrak{T}} = \bar{\mathfrak{T}} + \bar{\mathfrak{S}}$ .

Da  $\mathfrak{T} + \emptyset = \mathfrak{T} \cup \emptyset = \mathfrak{T}$  für jedes  $\mathfrak{T} \in \mathbb{T}$  gilt, ist die leere Menge  $\emptyset$  das neutrale Element in  $(\mathbb{T}, +)$ . Also ist  $\bar{\emptyset} = \{\{x\} : x \in \mathbb{E}^d\}$  das Nullelement in  $(\mathbb{V}, +)$ .

Es seien nun  $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathbb{T}$  mit  $\bar{\mathfrak{R}} + \bar{\mathfrak{T}} = \bar{\mathfrak{S}} + \bar{\mathfrak{T}}$ . Nach Lemma 3.23 ist  $\mathfrak{R} + \mathfrak{T} \cong \mathfrak{S} + \mathfrak{T}$ . Jedes  $T \in \mathfrak{T}$  ist entweder bereits in  $\mathfrak{R} + \mathfrak{T}$  bzw.  $\mathfrak{S} + \mathfrak{T}$  enthalten oder es ist kongruent zu einem Summanden eines unzerlegbaren Polytops  $U \in \mathfrak{R} + \mathfrak{T}$  und  $V \in \mathfrak{S} + \mathfrak{T}$  mit  $U \cong V$ . In beiden Fällen ist offensichtlich, dass  $\mathfrak{R} + (\mathfrak{T} \setminus \{T\}) \cong \mathfrak{S} + (\mathfrak{T} \setminus \{T\})$  gilt. Da  $\mathfrak{T}$  nur endlich viele unzerlegbare Polytope enthält folgt für die Zerlegungstypen  $\mathfrak{R} \cong \mathfrak{S}$  und damit für die Zerlegungsklassen  $\bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{S}}$ . q.e.d.

**Lemma 3.23:** Zwei Zerlegungstypen  $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathbb{T}$  sind genau dann kongruent, wenn die zugehörigen Zerlegungsklassen  $\bar{\mathfrak{S}}, \bar{\mathfrak{T}} \in \mathbb{V}$  übereinstimmen:

$$\bigwedge_{\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathbb{T}} \left( \mathfrak{S} \cong \mathfrak{T} \iff \bar{\mathfrak{S}} = \bar{\mathfrak{T}} \right)$$

BEWEIS: Sind  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{T}$  kongruent, so besitzen sie nach Definition 3.14 (\*\*) die gleichen Zerlegungsklassen.

Sei nun  $\mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_m\} \in \mathbb{S}_m$  und  $\mathfrak{T} = \{T_1, \dots, T_n\} \in \mathbb{T}_n$  mit  $\mathfrak{S} \not\cong \mathfrak{T}$ . Dann gibt es ein  $T_i \in \mathfrak{T}$  mit  $T_i \not\cong S_j$  für  $j = 1, \dots, m$  oder ein  $S_j \in \mathfrak{S}$  mit  $S_j \not\cong T_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . O.B.d.A. gelte  $T_n \not\cong S_j$  für  $j = 1, \dots, m$ .

Die Kanten von  $T_n$ , die nicht zueinander parallel liegen, mögen paarweise jeweils Winkel der Größen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  einschließen. Da  $T_n$  unzerlegbar ist, hat jeder Summand  $\tilde{T}$  von  $T_n$  die Form  $\tilde{T} = \mu \cdot T_n$  für ein  $\mu \in [0, 1]$ . Für  $\mu = 0$  ist dabei  $\tilde{T} = \{o\}$  der triviale Summand. Daraus ergibt sich für  $\xi_{\tilde{T}}$  der Zusammenhang  $\xi_{\tilde{T}} = \mu \cdot \xi_T$ .

Da es nur endlich viele Winkelgrößen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  gibt, existieren stets Bewegungen  $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathcal{B}_d$ , sodass je zwei Kanten  $A \in \mathfrak{F}_1(\beta_i(S_i))$  und  $B \in \mathfrak{F}_1(\beta_j(S_j))$  ( $i, j = 1, \dots, m; i \neq j$ ) nicht zueinander parallel liegen und der Winkel zwischen  $A$  und  $B$  keine der Größen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  annimmt. Wir definieren nun ein Polytop  $Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  durch

$$Q := \bigoplus_{j=1}^m \beta_j(S_j).$$

Dann ist offensichtlich  $Q \in \overline{\mathfrak{S}}$ . Wir werden nun zeigen, dass  $Q \notin \overline{\mathfrak{T}}$  gilt. Für  $\xi_Q$  erhalten wir die Darstellung  $\xi_Q(u) = \sum_{j=1}^m \xi_{\beta_j(S_j)}(u)$  für fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  bzgl.  $\sigma_{d-2}$ . Die Ausnahmemeenge umfasst dabei nur endlich viele höchstens  $(d-3)$ -dimensionale sphärische Polytope.

Wir wollen annehmen, es gäbe ein  $\mu \in (0, 1]$  und eine Bewegung  $\gamma \in \mathcal{B}_d$ , sodass  $\gamma(\tilde{T}) = \gamma(\mu \cdot T_n)$  ein Summand von  $Q$  ist. Dann gilt  $\xi_{\gamma(\tilde{T})}(u) = \mu \cdot \xi_{\gamma(T)}(u) \leq \xi_Q(u) = \sum_{j=1}^m \xi_{\beta_j(S_j)}(u)$  für  $\sigma_{d-2}$ -fast alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Weiter seien  $C, D \in \mathfrak{F}_1(\gamma(\tilde{T}))$  zwei beliebige Kanten von  $\gamma(\tilde{T})$ . Dann ist  $\xi_{\gamma(\tilde{T})}(u) = l(C) > 0$  für  $u \in \check{N}_C \cap \mathbb{S}^{d-1}$  und  $\xi_{\gamma(\tilde{T})}(u) = l(D) > 0$  für  $u \in \check{N}_D \cap \mathbb{S}^{d-1}$ . Damit ist weiterhin  $\xi_Q(u) = \sum_{j=1}^m \xi_{\beta_j(S_j)}(u) > 0$  für  $\sigma_{d-2}$ -fast alle  $u \in (\check{N}_C \cap \mathbb{S}^{d-1}) \cup (\check{N}_D \cap \mathbb{S}^{d-1})$ . Folglich gibt es ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ , sodass  $\xi_{\beta_i(S_i)}(u) > 0$  für  $u \in Z_i$  gilt, wobei  $Z_i \in \check{P}(\mathbb{S}^{d-1})$  ein offenes  $(d-2)$ -dimensionales sphärisches Polytop mit  $Z_i \subseteq \check{N}_C \cap \mathbb{S}^{d-1}$  ist. Ebenso gibt es ein  $j \in \{1, \dots, m\}$ , sodass  $\xi_{\beta_j(S_j)}(u) > 0$  für  $u \in Z_j$  gilt, wobei  $Z_j \in \check{P}(\mathbb{S}^{d-1})$  ein offenes  $(d-2)$ -dimensionales sphärisches Polytop mit  $Z_j \subseteq \check{N}_D \cap \mathbb{S}^{d-1}$  ist.

Somit gibt es Kanten  $A \in \mathfrak{F}_1(\beta_i(S_i))$  und  $B \in \mathfrak{F}_1(\beta_j(S_j))$  mit  $A = F_{\beta_i(S_i)}(u)$  für  $u \in Z_i$  und  $B = F_{\beta_j(S_j)}(u)$  für  $u \in Z_j$ . Wir nehmen an,  $A$  und  $B$  gehören zu verschiedenen Teilen; es gelte also  $i \neq j$ . Der Winkel zwischen  $A$  und  $B$  ist genauso groß wie der zwischen  $C$  und  $D$ . Die beiden Kanten  $C$  und  $D$  sind entweder zueinander parallel oder sie schließen einen Winkel der Größe  $\alpha_l$  für ein  $l \in \{1, \dots, k\}$  ein. Die Bewegungen  $\beta_i, \beta_j \in \mathcal{B}_d$  wurden jedoch so gewählt, dass  $A$  und  $B$  weder parallel sind, noch Winkel der Größen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  einschließen. Demnach muss  $i = j$  sein. O. B. d. A. sei  $i = j = m$ .

Damit gilt jedoch bereits  $\xi_{\gamma(\tilde{T})}(u) \leq \xi_{\beta_m(S_m)}(u)$  fast überall bzgl.  $\sigma_{d-2}$ . Nach Lemma 3.7 ist  $\gamma(\tilde{T})$  bereits ein Summand von  $\beta_m(S_m)$ . Da  $S_m$  unzerlegbar ist, muss  $S_m$  also ähnlich zu  $\tilde{T}$  und damit auch zu  $T_n$  sein. Da  $S_m \not\cong T_n$ , nehmen wir o. B. d. A. an,  $b(S_m) < b(T_n)$ . Sollte umgekehrt  $b(S_m) > b(T_n)$  sein, so vertauschen sich im Beweis einfach die Rollen von  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{T}$ .

Wir nehmen nun an, es gelte  $Q \in \overline{\mathfrak{T}}$ . Nach Definition 3.14 (\*\*) besitzt dann  $Q$  eine Zerlegung  $Q = \bigoplus_{i=1}^n Q_i$ , sodass  $Q_i \stackrel{z}{=} T_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gilt. Insbesondere ist  $Q_n \stackrel{z}{=} T_n$ . Da  $T_n$  unzerlegbar ist, besitzt jede Zerlegung von  $T_n$  (bis auf Translationen) die Gestalt  $T_n = \bigoplus_{l=1}^p \mu_l \cdot T_n$  mit  $\sum_{l=1}^p \mu_l = 1$  und  $\mu_l > 0$ . Für eine entsprechende Zerlegung von  $T_n$  lässt sich  $Q_n$  nun darstellen als  $Q_n = \bigoplus_{l=1}^p \gamma_l(\mu_l \cdot T_n)$  für geeignete Bewegungen  $\gamma_1, \dots, \gamma_p \in \mathcal{B}_d$ . Ist nun  $\gamma_l(\mu_l \cdot T_n)$  ein Summand von  $Q$ , so auch von  $\beta_m(S_m)$ . Damit ist  $Q_n$  ebenfalls ein Summand von  $\beta_m(S_m)$ . Demzufolge gilt für die mittlere Breite  $b(Q_n) \leq b(S_m)$ . Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung  $b(Q_n) = b(T_n) > b(S_m)$ . Somit ist  $Q \notin \overline{\mathfrak{T}}$  und damit ist  $\overline{\mathfrak{S}} \neq \overline{\mathfrak{T}}$ . q.e.d.

**Bemerkung 3.16:** Wir nennen die  $\overline{\mathfrak{T}}$  zwar Zerlegungsklassen. Wie das Beispiel aus Bemerkung 3.11 (ii) zeigt, gibt es jedoch Polytope, die in verschiedenen Zerlegungsklassen liegen. Deshalb stellt  $\mathbb{V}$  keine Klasseneinteilung auf  $\mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  dar. Allerdings kann man mit Hilfe der Zerlegungsklassen die Minkowskische Zerlegungsgleichheit von Polytopen beschreiben:

**Satz 3.12:** *Zwei konvexe Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  sind genau dann Minkowski-zerlegungsgleich, wenn sie in einer gleichen Zerlegungsklasse liegen:*

$$P \stackrel{z}{=} Q \iff \bigvee_{\mathfrak{T} \in \mathbb{T}} (P \in \mathfrak{T} \wedge Q \in \mathfrak{T}).$$

**Bemerkung 3.17:** (i) Durch die Einführung der beiden Operationen  $\cdot$  und  $+$  steht nun der Begriff der konvexen Kombination zur Verfügung. Konvexe Kombinationen von Zerlegungstypen (bzw. von Zerlegungsklassen) sind wieder Zerlegungstypen (bzw. -klassen). Insbesondere gilt für jedes Polytop  $P$  mit  $P \in \overline{\mathfrak{S}}$  und  $P \in \mathfrak{T} : P \in \lambda \cdot \overline{\mathfrak{S}} + (1 - \lambda) \cdot \mathfrak{T}$  für jedes  $\lambda \in [0, 1]$ . Liegt demnach  $P$  in zwei verschiedenen Klassen  $\overline{\mathfrak{S}} \neq \mathfrak{T}$ , so liegt es sogar in unendlich vielen Klassen.

(ii) Die in Definition 3.14 auf  $\mathbb{T}$  eingeführte Kongruenz  $\cong$  ist eine Äquivalenzrelation. Da sie außerdem mit den beiden Operationen  $+$  und  $\cdot$  verträglich ist, ist  $\cong$  sogar eine Kongruenzrelation auf der Struktur  $(\mathbb{T}, +, \cdot)$ . Wir können demnach die Faktorstruktur  $\mathbb{T}/\cong$  bilden. Diese ist dann wegen Lemma 3.23 isomorph zu  $\mathbb{V}$ .

(iii) In Definition 3.14 sind wir ausgegangen von der Menge  $\mathfrak{P}$  aller Polytope des  $\mathbb{E}^d$ . Daraus haben wir die Menge  $\mathfrak{U}$  der unzerlegbaren Polytope ausgezeichnet. Damit wurde wiederum die Menge  $\mathbb{T}$  der Zerlegungstypen und die Menge  $\mathbb{V}$  aller Zerlegungsklassen definiert. Genau so kann man vorgehen, wenn man sich von vorn herein auf die Polytope aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^d)$ , deren Steinerpunkt im Ursprung liegt, beschränkt. An die entsprechenden Bezeichnungen aus Definition 3.14 wird in diesem Fall der Index  $o$  angehängen. Wir erhalten somit die entsprechende Menge der unzerlegbaren Polytope  $\mathfrak{U}_o$ , die Menge der Zerlegungstypen  $\mathbb{T}_o$  bzw. die Menge der Zerlegungsklassen  $\mathbb{V}_o$ . Dann sind alle folgenden Strukturen isomorph:

$$\mathbb{T}/\cong \equiv \mathbb{V} \equiv \mathbb{V}_o \equiv \mathbb{T}_o/\cong.$$

Schließlich wollen wir noch eine Abbildung  $\zeta$  einführen, die jedem Polytop seine Zerlegungsklassen zuordnet. Da dies im Allgemeinen nicht eindeutig ist, müssen wir eine mehrdeutige Abbildung verwenden. Formal beschreiben wir das durch eine Abbildung in die Potenzmenge von  $\mathbb{V}$ :

**Definition 3.15:** Die Abbildung  $\zeta : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow 2^{\mathbb{V}}$  wird definiert durch

$$\zeta(P) := \{\mathfrak{T} \in \mathbb{V} : P \in \mathfrak{T}\}.$$

**Lemma 3.24:** Die Abbildung  $\zeta : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow 2^{\mathbb{V}}$  besitzt folgende Eigenschaften:

- (i)  $\bigwedge_{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( \zeta(P) \neq \emptyset \right),$
- (ii)  $\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( P \cong Q \implies \zeta(P) = \zeta(Q) \right) \text{ und}$
- (iii)  $\bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( \zeta(P) + \zeta(Q) \subseteq \zeta(P \oplus Q) \right).$

BEWEIS: Die erste Aussage ist offensichtlich, da sich jedes Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  in unzerlegbare Teile zerlegen lässt. Die Bewegungsinvarianz ergibt sich direkt aus der Definition 3.14 (\*\*).

Es seien nun  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  zwei Polytope und  $\overline{\mathfrak{S}} \in \zeta(P)$  und  $\overline{\mathfrak{T}} \in \zeta(Q)$ , wobei  $\mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_n\} \in \mathbb{T}_n$  und  $\mathfrak{T} = \{T_1, \dots, T_m\} \in \mathbb{T}_m$  ist. Ist  $Q$  eine einpunktige Menge, so ist  $\overline{\mathfrak{T}} = \emptyset = \{\{x\} : x \in \mathbb{E}^d\}$ . Dann ist  $\overline{\mathfrak{S}} + \overline{\mathfrak{T}} = \overline{\mathfrak{S}} + \emptyset = \overline{\mathfrak{S}}$  und es gilt  $\zeta(P) + \zeta(Q) = \zeta(P)$ . Außerdem ist  $P \oplus Q$  translationsgleich zu  $P$  und damit  $\zeta(P) + \zeta(Q) = \zeta(P) = \zeta(P \oplus Q)$ . Entsprechendes gilt natürlich auch, wenn  $P$  eine einpunktige Menge ist.

Sei nun weiter  $\dim P \geq 1$  und  $\dim Q \geq 1$  vorausgesetzt. Dann gibt es nach Definition 3.14 (\*\*) Polytope  $P_1, \dots, P_n$ , sodass  $P \cong \bigoplus_{i=1}^n P_i$  und  $P_i \stackrel{z}{\cong} S_i$  für  $i = 1, \dots, n$  ist. Entsprechend gibt es Polytope  $Q_1, \dots, Q_m$ , sodass  $Q \cong \bigoplus_{i=1}^m Q_i$  und  $Q_i \stackrel{z}{\cong} T_i$  für  $i = 1, \dots, m$  ist. Damit ist  $P \oplus Q \cong \bigoplus_{i=1}^n P_i \oplus \bigoplus_{i=1}^m Q_i$  mit  $P_i \stackrel{z}{\cong} S_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $Q_i \stackrel{z}{\cong} T_i$  für  $i = 1, \dots, m$ . Sind gewisse  $S_i$  und  $T_j$  zueinander ähnlich, so fassen wir die entsprechenden Summanden zusammen. Somit ist  $P \oplus Q \in \overline{\mathfrak{S}} + \overline{\mathfrak{T}}$  und damit weiterhin  $\overline{\mathfrak{S}} + \overline{\mathfrak{T}} \in \zeta(P \oplus Q)$ . Infolge dessen gilt  $\zeta(P) + \zeta(Q) \subseteq \zeta(P \oplus Q)$ . q.e.d.

In Verbindung mit Satz 3.12 erhalten wir nun folgendes Kriterium für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit konvexer Polytope:

**Satz 3.13:** Für zwei konvexe Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  gilt:

$$P \stackrel{z}{\cong} Q \iff \zeta(P) \cap \zeta(Q) \neq \emptyset.$$

BEWEIS: Sind  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleich, so gibt es nach Satz 3.12 eine Zerlegungsklasse  $\overline{\mathfrak{T}} \in \mathbb{V}$  mit  $P, Q \in \overline{\mathfrak{T}}$ . Daraus ergibt sich  $\overline{\mathfrak{T}} \in \zeta(P)$  und  $\overline{\mathfrak{T}} \in \zeta(Q)$ . Also gilt  $\zeta(P) \cap \zeta(Q) \neq \emptyset$ . Ist umgekehrt  $\zeta(P) \cap \zeta(Q) \neq \emptyset$ , so gibt es auch eine Zerlegungsklasse  $\overline{\mathfrak{T}} \in \mathbb{V}$  mit  $\overline{\mathfrak{T}} \in \zeta(P)$  und  $\overline{\mathfrak{T}} \in \zeta(Q)$ . Demnach gilt  $P, Q \in \overline{\mathfrak{T}}$  und  $P$  und  $Q$  sind nach Satz 3.12 zerlegungsgleich. q.e.d.

In der klassischen Zerlegungstheorie spielen gewisse formale Hauptkriterien eine wichtige Rolle. Dabei gibt es eine ganze Reihe von Aussagen die unter diesem Stichwort subsumiert sind. Es geht dabei um die Charakterisierung der klassischen Zerlegungsgleichheit durch eine Klasse von Homomorphismen in Halbgruppen, Gruppen, Größensystemen



oder auch ganz speziell in die rationalen oder reellen Zahlen. Die ersten derartigen Aussagen stammen von B. Jessen [Jes] und H. Hadwiger [Ha2].

Wir haben bereits gesehen, dass die Menge der Zerlegungsklassen  $\mathbb{V}$  nicht disjunkt ist. Deshalb ist es notwendig, statt der Homomorphismen mehrdeutige Abbildungen zu betrachten, die die in Lemma 3.24 gezeigten Eigenschaften von  $\zeta$  besitzen.

**Definition 3.16:** Es sei  $(G, +)$  eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung  $\varphi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow 2^G$  heißt *mehrdeutige bewegungsinvariante superadditive Polyederabbildung in  $(G, +)$* , wenn gilt:

$$(H1) \quad \bigwedge_{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( \varphi(P) \neq \emptyset \right),$$

$$(H2) \quad \bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( P \cong Q \implies \varphi(P) = \varphi(Q) \right) \text{ und}$$

$$(H3) \quad \bigwedge_{P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( \varphi(P) + \varphi(Q) \subseteq \varphi(P \oplus Q) \right).$$

In gewisser Weise stellen diese mehrdeutigen Abbildungen eine Verallgemeinerung der Homomorphismen dar. Denn sind solche mehrdeutigen Abbildungen mit den Eigenschaften (H1)-(H3) eindeutig, so sind sie bereits Homomorphismen im Sinne einer Identifizierung der einelementigen Mengen aus  $2^G$  mit den Elementen aus  $G$ .

**Lemma 3.25:** Ist  $\varphi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow 2^G$  eine mehrdeutige bewegungsinvariante superadditive Polyederabbildung in eine Gruppe  $(G, +)$ , d. h. es gelten die Eigenschaften (H1)-(H3) und ist  $\varphi$  eindeutig, d. h. es gilt zusätzlich

$$\bigwedge_{P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)} \left( |\varphi(P)| = 1 \right),$$

so ist  $\varphi$  ein bewegungsinvarianter Homomorphismus von  $(\mathfrak{P}(\mathbb{E}^d), \oplus)$  in  $(G, +)$ .

**BEWEIS:** Mit (H3) gilt  $\varphi(P) + \varphi(Q) \subseteq \varphi(P \oplus Q)$  für alle  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ . Da  $\varphi$  eindeutig ist, gilt  $|\varphi(P)| = 1, |\varphi(Q)| = 1$  und  $|\varphi(P \oplus Q)| = 1$ . Damit muss gleichermaßen  $\varphi(P) + \varphi(Q) = \varphi(P \oplus Q)$  gelten. Im Sinne einer Identifizierung der einelementigen Mengen aus  $2^G$  mit den Elementen aus  $G$  ist  $\varphi$  somit ein Homomorphismus von  $(\mathfrak{P}(\mathbb{E}^d), \oplus)$  in  $(G, +)$ . Die Bewegungsinvarianz überträgt sich natürlich von Eigenschaft (H2). q.e.d.

In Analogie zur klassischen Zerlegungstheorie kann man nun folgendes formales Hauptkriterium formulieren:

**Satz 3.14: (Formales Hauptkriterium)** Zwei konvexe Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  sind genau dann Minkowski-zerlegungsgleich, wenn für alle mehrdeutigen bewegungsinvarianten superadditiven Polyederabbildungen  $\varphi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow 2^G$  in abelsche Gruppen  $(G, +)$  gilt:

$$\varphi(P) \cap \varphi(Q) \neq \emptyset.$$

BEWEIS: Es seien  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  zwei Minkowski-zerlegungsgleiche Polytope und  $\varphi : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow 2^G$  eine mehrdeutige Abbildung mit den Eigenschaften (H1)–(H3). Dann besitzen  $P$  und  $Q$  jeweils Darstellungen  $P = \bigoplus_{i=1}^n P_i$  mit  $P_1, \dots, P_n \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  bzw.  $Q = \bigoplus_{i=1}^n Q_i$  mit  $Q_1, \dots, Q_n \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  und es gilt  $P_i \cong Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Mit der Eigenschaft (H2) gilt dann außerdem  $\varphi(P_i) = \varphi(Q_i)$  für  $i = 1, \dots, n$ . Aus der Eigenschaft (H3) ergibt sich damit

$$\sum_{i=1}^n \varphi(P_i) \subseteq \varphi\left(\bigoplus_{i=1}^n P_i\right) = \varphi(P) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \varphi(Q_i) \subseteq \varphi\left(\bigoplus_{i=1}^n Q_i\right) = \varphi(Q)$$

Da nach (H1) stets  $\varphi(P_i) \neq \emptyset$  und  $\varphi(Q_i) \neq \emptyset$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gelten, und außerdem  $\sum_{i=1}^n \varphi(P_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(Q_i)$  gilt, ergibt sich

$$\varphi(P) \cap \varphi(Q) \neq \emptyset.$$

Umgekehrt besitzt nach Lemma 3.24 die in Definition 3.15 eingeführte Abbildung  $\zeta : \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d) \rightarrow 2^{\mathbb{V}}$  die Eigenschaften (H1)–(H3). Gilt  $\zeta(P) \cap \zeta(Q) \neq \emptyset$ , so sind nach Satz 3.13  $P$  und  $Q$  auch Minkowski-zerlegungsgleich. q.e.d.

## 3.4. Typen zerlegungsgleicher Polygone

Wir wollen uns jetzt im zweidimensionalen Fall einmal etwas genauer ansehen, wie die Zerlegungstypen für verschiedene  $n$ -Ecke aussehen. Insbesondere wollen wir untersuchen, welche Polygone nur in einer Zerlegungsklasse liegen und welche zu verschiedenen Zerlegungsklassen gehören. Beginnen wollen wir dabei mit den Drei- und Vierecken, um dann zu sehen, was ab fünf Ecken für neue Phänomene auftreten.

### 3.4.1. Dreiecke

Die Dreiecke sind (abgesehen von Strecken und einpunktigen Mengen) die einfachsten Polygone. Da Dreiecke unzerlegbar sind, ergibt sich aus Lemma 3.20 (i) sofort folgender Satz:

**Satz 3.15: (Folgerung aus Lemma 3.20 (i))** *Für zwei Dreiecke  $D_1, D_2 \in \mathfrak{U}$  gilt:*

$$D_1 \stackrel{z}{=} D_2 \quad \Longleftrightarrow \quad D_1 \cong D_2$$

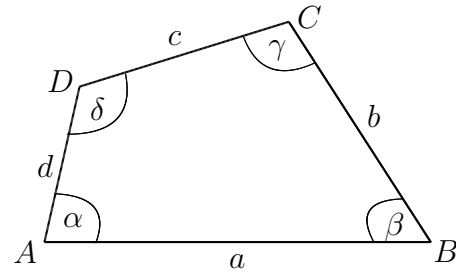
BEWEIS: Sei  $D_1 \stackrel{z}{=} D_2$ . Da Dreiecke unzerlegbar sind, ist jeder Summand eines Dreiecks homothetisch zu diesem. Umgekehrt ist eine Minkowskisumme von Polygonen nur dann ein Dreieck, wenn diese Polygone selbst wieder Dreiecke sind, die homothetisch zum Ausgangsdreieck sind. Damit sind  $D_1$  und  $D_2$  ähnlich zueinander. Da  $D_1$  und  $D_2$  die gleiche mittlere Breite haben müssen, müssen sie auch kongruent sein. Die Umkehrung ist trivial. q.e.d.

**Bemerkung 3.18:** Ein entsprechender Satz gilt offensichtlich genauso für Strecken und einpunktige Mengen.

### 3.4.2. Vierecke

**Bezeichnungen:** Für Vierecke wollen wir folgende Bezeichnungen für die Ecken, Seiten und Winkel einführen:

Zur Vereinfachung sollen jeweils die selben Symbole  $a, b, c, d$  für die Seiten von Polygonen und deren Länge verwendet werden. Ebenso werden die kleinen griechischen Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sowohl für die Winkel, wie auch für die Größe derselben verwendet. Aus dem Zusammenhang ist jeweils ersichtlich, in welcher Bedeutung die Zeichen verwendet werden. Die Normalenrichtungen der Seiten  $a, b, c, d$  werden mit  $n_a, n_b, n_c, n_d$  bezeichnet.



**Abbildung 7:** Bezeichnung der Ecken, Seiten und Winkel bei Vierecken

Untersucht man, zu welchen Zerlegungstypen  $\mathfrak{T}$  Vierecke gehören, so stellt man fest, dass dabei vier Fälle möglich sind:

- (I)  $\mathfrak{T} = \{S\}$  besteht aus einer Strecke  $S$ .  $\implies$  Dann muss das Viereck ein Parallelogramm sein.
- (II)  $\mathfrak{T} = \{S, T\}$  besteht aus einer Strecke  $S$  und einem Dreieck  $T$ .  $\implies$  Dann muss das Viereck ein Trapez sein.
- (III)  $\mathfrak{T} = \{T\}$  besteht aus einem Dreieck  $T$ .  $\implies$  Dann besitzt das Viereck genau ein Paar gegenüberliegender Winkel gleicher Größe. Solche Vierecke sollen im Folgenden verallgemeinerte Drachenvierecke genannt werden.
- (IV)  $\mathfrak{T} = \{T_1, T_2\}$  besteht aus zwei (zueinander nicht ähnlichen) Dreiecken  $T_1$  und  $T_2$ .  $\implies$  Der Fall tritt dann auf, wenn das Viereck nicht zu den Typen I-III gehört.

Weitere Fälle können nicht auftreten. Es zeigt sich in jedem Fall, dass ein Viereck nur in einer Zerlegungsklasse liegen kann. Im Folgenden wollen wir die einzelnen Fälle genauer untersuchen.

#### I. Parallelogramme

Als erstes wollen wir uns den Parallelogrammen zuwenden.

**Satz 3.16:** (i) Sei  $S \in \mathfrak{U}$  eine Strecke und  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^2)$  ein Polygon. Dann gilt:

$$S \stackrel{z}{=} P \iff b(S) = b(P) \wedge P \text{ zentralsymmetrisch}$$

(ii) Sei  $P$  ein Parallelogramm. Dann gilt:

$$\zeta(P) = \{\overline{\mathfrak{T}}\} \text{ mit } \mathfrak{T} = \{S\}, \text{ wobei } S \text{ eine Strecke der Länge } a + b \text{ ist.}$$

(iii) Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn es Minkowski-zerlegungsgleich zu einer Strecke ist.

BEWEIS: (i) Strecken lassen sich nur in Strecken zerlegen. Demzufolge ist jedes Polygon  $P$ , welches zerlegungsgleich zu einer Strecke ist, die Minkowskisumme von Strecken. Dies sind jedoch genau die zentralsymmetrischen Polygone.

(ii) Wäre ein Dreieck  $T$  ein Summand von  $P$ , so müssen die Normalenrichtungen der Dreiecksseiten ebenso Normalenrichtungen des Parallelogramms  $P$  sein. Für diese gilt jedoch  $n_a = -n_c$  und  $n_b = -n_d$ . Damit können drei dieser Normalenrichtungen kein Dreieck bilden.

(iii) folgt aus (i).

q.e.d.

## II. Trapeze, die keine Parallelogramme sind

**Satz 3.17:** (i) Sei  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  ein Trapez mit  $a \parallel c$  und  $a > c$ . Dann gilt:

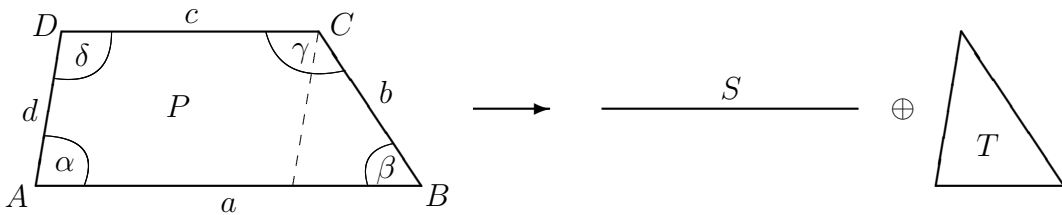
$$\zeta(P) = \{\overline{\mathfrak{T}}\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{T} = \{S, T\},$$

wobei  $S$  eine Strecke der Länge  $c$  ist und  $T$  ein Dreieck mit den Seitenlängen  $a - c$ ,  $b$  und  $d$  ist.

(ii) Ist  $T$  nicht gleichschenkelig, so gibt es bis auf Kongruenz genau drei Trapeze in  $\overline{\mathfrak{T}}$ .

(iii) Ist  $T$  gleichschenkelig, aber nicht gleichseitig, so gibt es bis auf Kongruenz genau zwei Trapeze in  $\overline{\mathfrak{T}}$ .

(iv) Ist  $T$  gleichseitig, so gibt es bis auf Kongruenz genau ein Trapez in  $\overline{\mathfrak{T}}$ .



**Abbildung 8:** Zerlegung eines Trapezes in eine Strecke und ein Dreieck

BEWEIS: (i) Offensichtlich ist die Seite  $c$  selbst ein (maximaler) Summand von  $P$  und damit natürlich jedes Translat von  $c$ .  $S$  bezeichne die entsprechende Strecke, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Ebenso ist dann ein Dreieck mit den Normalenrichtungen  $n_a, n_b$  und  $n_d$  ein Summand von  $P$ .  $T$  sei nun das maximale Dreieck mit diesen Normalenrichtungen, dessen Steinerpunkt ebenfalls im Ursprung liegt. Dann hat  $T$  die Seitenlängen  $a - c, b, d$ . Offensichtlich lässt sich somit  $P$  als Summe

von  $S$  und  $T$  darstellen.

Angenommen es gibt einen weiteren unzerlegbaren Summanden  $U \in \mathfrak{U}$  von  $P$ . Dann ist  $U$  entweder eine Strecke oder ein Dreieck.

**1. Fall:**  $U$  ist eine Strecke.

Dann hat  $P$  nach Lemma 3.19 (ii) ein Paar paralleler Seiten, die zu  $U$  parallel sind. Entsprechend ist  $U$  parallel zu  $c$  und damit zu  $S$ . Da  $S$  maximal war, ist  $U$  somit schon ein Summand von  $S$ .

**2. Fall:**  $U$  ist ein Dreieck.

Die drei Normalenrichtungen  $n_1, n_2, n_3$  von  $U$  sind in diesem Fall nach Lemma 3.19 (i) Normalenrichtungen von  $P$ . Da  $a$  und  $c$  parallel sind, können  $n_a$  und  $n_c$  nicht beide zu  $U$  gehören.  $n_b, n_c$  und  $n_d$  können jedoch nicht Normalenrichtung eines Dreiecks sein. Folglich besitzt  $U$  die Normalenrichtungen  $n_a, n_b$  und  $n_d$ . Das sind die gleichen Normalenrichtungen, wie beim Dreieck  $T$ . Somit liegen die beiden Dreiecke homothetisch zueinander. Da  $T$  schon ein maximaler Summand war, ist  $U$  somit ebenfalls ein Summand von  $T$ .

(ii) – (iv): Die Minkowskisumme verschiedener, aber zueinander ähnlicher Dreiecke und verschiedener Strecken ist genau dann ein Trapez, wenn alle Dreiecke homothetisch zueinander liegen und alle Strecken zueinander parallel sind. Außerdem müssen die Strecken wiederum parallel zu einer der Dreiecksseiten sein. Bildet man die Minkowskisumme eines Dreiecks  $T$  mit einer Strecke  $S$ , so entsteht entweder ein Viereck oder ein Fünfeck. Und zwar entsteht genau dann ein Viereck, wenn die Strecke  $S$  parallel zu einer der Seiten von  $T$  ist. Demzufolge gibt es drei verschiedene Möglichkeiten der gegenseitigen Lage von  $T$  und  $S$ , sodass  $T \oplus S$  ein Trapez wird. Ist das Dreieck  $T$  nicht gleichschenkelig, so ergeben sich auch tatsächlich drei verschiedene Trapeze, die nicht kongruent zueinander sind. Ist  $T$  gleichschenkelig, so sind zwei der drei möglichen Trapeze kongruent. Dadurch gibt es bis auf Kongruenz genau zwei verschieden Trapeze in der Zerlegungsklasse  $\overline{\{S, T\}}$ . Ist schließlich  $T$  ein gleichseitiges Dreieck, so sind darüber hinaus alle sich als Minkowskisumme  $T \oplus S$  ergebende Trapeze kongruent. q.e.d.

### III. Verallgemeinerte Drachenvierecke, die keine Parallelogramme sind

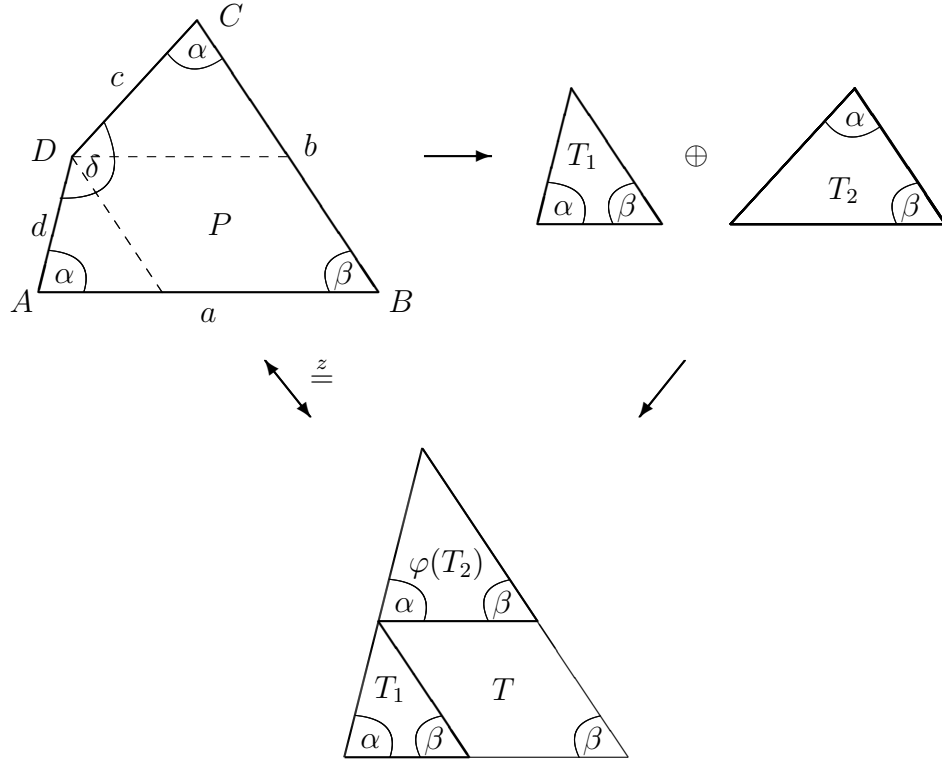
**Definition 3.17:** Ein Viereck heißt *verallgemeinertes Drachenviereck*, wenn es mindestens ein Paar gegenüberliegender Winkel gleicher Größe besitzt.

**Satz 3.18:** (i) Sei  $P$  ein verallgemeinertes Drachenviereck mit  $\alpha = \gamma$ , aber  $\beta < \delta$ . Dann gilt:

$$\zeta(P) = \{\overline{\mathfrak{T}}\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{T} = \{T\},$$

wobei  $T$  ein Dreieck mit den Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \pi - \alpha - \beta$  ist und die  $\beta$  gegenüberliegende Seite die Länge  $c + d$  besitzt.

- (ii) Ist  $T$  nicht gleichschenkelig, so gibt es bis auf Kongruenz genau drei Drachenvierecke (bzw. drei Scharen verallgemeinerter Drachenvierecke) in  $\overline{\mathfrak{T}}$ .
- (iii) Ist  $T$  gleichschenkelig, aber nicht gleichseitig, so gibt es bis auf Kongruenz genau ein Drachenviereck (bzw. eine Schar verallgemeinerter Drachenvierecke) in  $\overline{\mathfrak{T}}$ .
- (iv) Kein Viereck ist mit einem gleichseitigen Dreieck zerlegungsgleich.



**Abbildung 9:** Zerlegung eines verallgemeinerten Drachenvierecks in zwei Dreiecke und Zusammenfassung der beiden Teile zu einem Dreieck

BEWEIS: (i) Da das Viereck  $P$  keine parallelen Seiten besitzt, müssen alle unzerlegbaren Summanden Dreiecke sein. Nach Lemma 3.19 (i) müssen alle Normalenrichtungen von Summanden von  $P$  ebenso Normalenrichtungen von  $P$  sein. Nun gibt es vier Möglichkeiten, aus den vier Normalenrichtungen  $n_a, n_b, n_c, n_d$  von  $P$  drei auszuwählen. Die Richtungen  $n_a, n_c, n_d$  können jedoch nicht Normalenrichtungen eines Dreiecks sein, da  $\alpha + \delta > \pi$  ist. Aus dem selben Grunde können auch  $n_b, n_c, n_d$  nicht Normalenrichtungen eines Dreiecks sein.

Somit besitzt  $P$  nur zwei verschiedene, zueinander nicht homothetische, unzerlegbare Summanden.  $T_1$  sei dabei das maximale Dreieck mit den Normalenrichtungen  $n_a, n_b, n_d$  dessen Steinerpunkt im Ursprung liegt. Dieses besitzt die Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\pi - \alpha - \beta$ . Außerdem besitzt die dem Winkel  $\beta$  gegenüberliegende Seite die Länge

$d$ , da eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_d$  beim Dreieck  $T_2$  nicht vorkommt. Entsprechend bezeichne  $T_2$  das maximale Dreieck mit den Normalenrichtungen  $n_a, n_b, n_c$  dessen Steinerpunkt im Ursprung liegt. Dieses besitzt ebenfalls die Winkel  $\alpha, \beta$  und  $\pi - \alpha - \beta$ .

Außerdem besitzt die dem Winkel  $\beta$  gegenüberliegende Seite die Länge  $c$ , da eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_c$  beim Dreieck  $T_1$  nicht vorkommt. Da die beiden Dreiecke zueinander ähnlich sind, gibt es eine Bewegung  $\varphi$  (genauer eine Spiegelung mit einer Spiegelachse, die durch den Ursprung geht), sodass beide Dreiecke homothetisch zueinander liegen. Die Summe der beiden Dreiecke  $T_1$  und  $\varphi(T_2)$  ist dann wieder ein Dreieck  $T := T_1 \oplus \varphi(T_2)$ , welches ähnlich zu  $T_1, T_2$  ist. Bei diesem besitzt die dem Winkel  $\beta$  gegenüberliegende Seite die Länge  $c + d$ .

- (ii) – (iv):  $P$  ist genau dann ein (eigentliches) Drachenviereck, wenn zusätzlich gilt, dass die Seiten  $c$  und  $d$  gleich lang sind. Dann sind die beiden Dreiecke  $T_1$  und  $T_2$  sogar kongruent. Wir fragen nun anders herum: Es seien  $T_1, T_2$  zwei Dreiecke, die kongruent sind. Unter welchen Bedingungen ist die Summe  $T_1 \oplus T_2$  ein Drachenviereck?

Zunächst einmal müssen die beiden Dreiecke eine bestimmte gegenseitige Lage besitzen, wie sie in Abbildung 9 angedeutet ist. Allerdings besitzt die Zuordnung der entsprechenden Dreieckswinkel zu den Winkeln  $\alpha, \beta$  und  $\varepsilon := \pi - \alpha - \beta$  noch eine gewisse Wahlfreiheit. Damit die Summe  $T_1 \oplus T_2$  ein Drachenviereck wird muss der Winkel  $\pi > \beta + 2\varepsilon = \delta$  sein. Ist  $\pi < \beta + 2\varepsilon$ , so entsteht zwar ebenfalls ein Drachenviereck, jedoch tauschen dabei die Winkel  $\beta$  und  $\delta$  die Rollen. Gilt  $\pi = \beta + 2\varepsilon$ , so entsteht bei dieser Konstruktion gar kein Viereck. Betrachten wir diese Bedingung genauer, so erhalten wir  $\pi > \delta = \beta + 2\varepsilon = \beta + \varepsilon + \pi - \alpha - \beta = \varepsilon + \pi - \alpha$ . Das ist genau dann der Fall, wenn  $\alpha > \varepsilon$  ist.

$T_1$  bzw.  $T_2$  mögen die Winkel  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  besitzen. Sind  $T_1$  bzw.  $T_2$  nicht gleichschenkelig, so sind die drei Winkel  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  alle verschieden voneinander. Wir können somit frei wählen, welcher der Winkel  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  der Winkel  $\beta$  sein soll. Von den beiden übrigen Winkeln muss dann der größere  $\alpha$  und der kleinere  $\varepsilon$  sein. Wir haben folglich drei verschiedene Möglichkeiten, der relativen Lage von  $T_1$  und  $T_2$  zueinander. Diese führen stets zu verschiedenen Drachenvierecken.

Sind  $T_1$  bzw.  $T_2$  gleichschenkelig, aber nicht gleichseitig, so sind zwei der drei Winkel  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  gleich. Dann muss  $\beta$  einer der beiden gleichen Winkel sein. Von den übrigen beiden Winkeln muss wiederum der größere gleich  $\alpha$  und der kleinere gleich  $\varepsilon$  sein. Damit gibt es nur eine Möglichkeit, wie  $T_1$  und  $T_2$  zueinander liegen können. Damit liegt (bis auf Kongruenz) nur ein Drachenviereck in  $\overline{\mathfrak{T}}$ .

Sind schließlich  $T_1$  bzw.  $T_2$  gleichseitig, so kann die Bedingung  $\alpha > \varepsilon$  nicht erfüllt werden. Somit kann ein gleichseitiges Dreieck nicht zerlegungsgleich zu einem (verallgemeinerten) Drachenviereck sein. Da die verallgemeinerten Drachenvierecke die einzigen Vierecke sind, die zerlegungsgleich zu einem Dreieck sind, kann dementsprechend kein Viereck zerlegungsgleich zu einem gleichseitigen Dreieck sein.

Jetzt wollen wir noch die Anzahl aller verallgemeinerten Drachenvierecke, die in einer Zerlegungsklasse liegen, untersuchen. In diesem Fall müssen die beiden Dreiecke

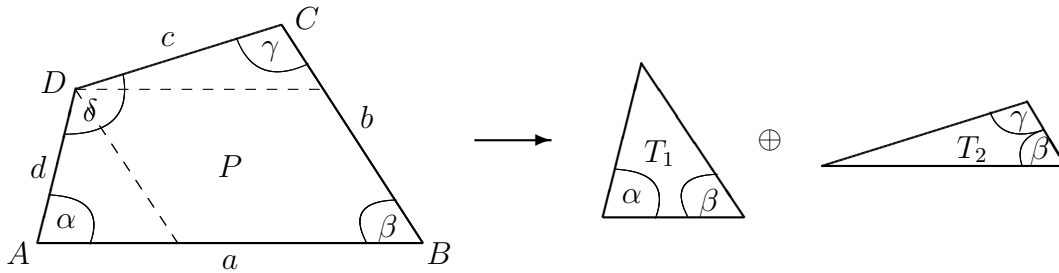
$T_1$  und  $T_2$  nicht zueinander kongruent sein. Es genügt, wenn sie ähnlich zueinander sind. An den Winkelbedingungen ändert sich dann natürlich nichts. Da die beiden Dreiecke  $T_1$  und  $T_2$  zueinander ein beliebiges Größenverhältnis besitzen können, gehört zu jedem Drachenviereck eine ganze Schar verallgemeinerter Drachenvierecke, die ebenfalls zu  $T$  zerlegungsgleich sind. Ist das Dreieck  $T$  nicht gleichschenkelig, so gibt es drei Scharen verallgemeinerter Drachenvierecke, die zerlegungsgleich zu  $T$  sind. Ist  $T$  ein gleichschenkliges Dreieck, so gibt es entsprechend nur eine Schar verallgemeinerter Drachenvierecke, die zerlegungsgleich zu  $T$  sind. q.e.d.

#### IV. Sonstige Vierecke

**Satz 3.19:** Sei  $P$  ein Viereck, welches nicht zu den Typen I-III gehört und es gelte  $\alpha + \beta < \pi$  und  $\beta + \gamma < \pi$ . (Dies lässt sich durch zyklische Umbezeichnung stets erreichen.) Dann gilt:

$$\zeta(P) = \{\bar{\mathfrak{T}}\} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{T} = \{T_1, T_2\},$$

wobei  $T_1$  und  $T_2$  Dreiecke mit genau einer gleichen Winkelgröße  $\beta$  sind. Genauer gilt, dass  $T_1$  ein Dreieck ist mit den Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \pi - \alpha - \beta$  und die  $\beta$  gegenüberliegende Seite besitzt die Länge  $d$ .  $T_2$  ist ein Dreieck mit den Winkelgrößen  $\beta, \gamma, \pi - \beta - \gamma$  und die  $\beta$  gegenüberliegende Seite besitzt die Länge  $c$ .



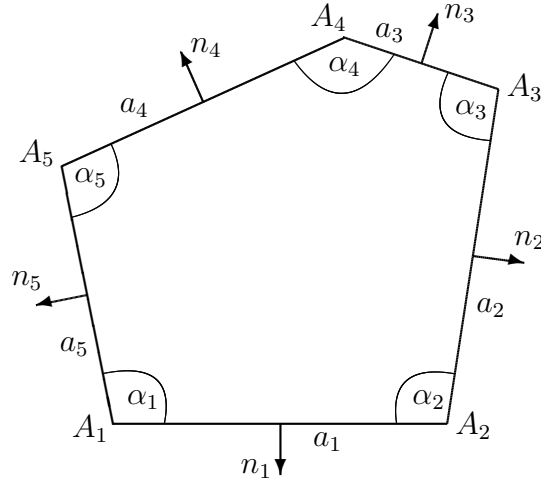
**Abbildung 10:** Zerlegung eines Vierecks vom Typ IV in zwei Dreiecke

**BEWEIS:** Der Beweis erfolgt analog zu Satz 3.18 (i). Allerdings sind in diesem Fall die beiden Dreiecke  $T_1$  und  $T_2$  nicht zueinander ähnlich, sodass sie nicht zu einem Dreieck zusammengefasst werden können. Mit den obigen Bezeichnungen ist  $T_1$  damit ein Dreieck mit den Winkelgrößen  $\alpha, \beta$  und  $\pi - \alpha - \beta$ . Außerdem besitzt die dem Winkel  $\beta$  gegenüberliegende Seite die Länge  $d$ , da eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_d$  beim Dreieck  $T_2$  nicht vorkommt.  $T_2$  ist ein Dreieck mit den Winkelgrößen  $\beta, \gamma$  und  $\pi - \beta - \gamma$ . Zusätzlich besitzt die dem Winkel  $\beta$  gegenüberliegende Seite die Länge  $c$ , da eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_c$  beim Dreieck  $T_1$  nicht vorkommt. q.e.d.



### 3.4.3. Fünfecke

**Bezeichnungen:** Für Fünfecke wollen wir folgende Bezeichnungen für die Ecken, Seiten und Winkel einführen (vgl. Abbildung 11):



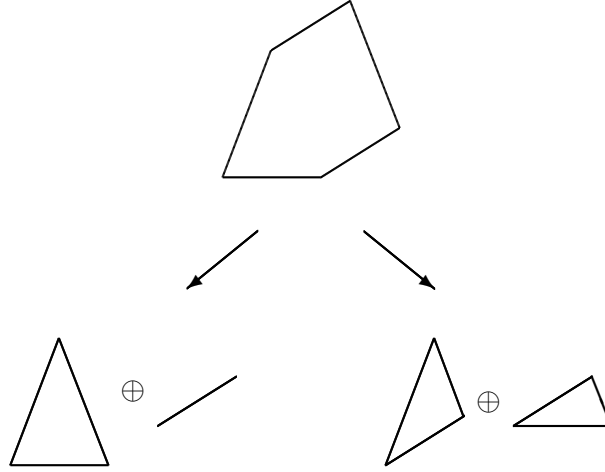
**Abbildung 11:** Bezeichnung der Ecken, Seiten und Winkel bei Fünfecken

Die Ecken eines Fünfecks werden (in positivem Umlaufsinn) mit  $A_1, A_2, \dots, A_5 = A_0$  bezeichnet. Wir wollen also, wie wir das schon früher gehandhabt haben, die Indizierung zyklisch verstehen. Die Seiten eines Fünfecks bezeichnen wir mit  $a_i := \overline{A_i A_{i+1}}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ). Wie bei den Vierecken sollen hier jeweils die selben Symbole  $a_1, a_2, \dots, a_5 = a_0$  sowohl für die Seiten eines Fünfecks, als auch für deren Länge verwendet werden.

Die Normaleneinheitsvektoren der Seiten  $a_1, a_2, \dots, a_5 = a_0$  werden entsprechend mit  $n_1, n_2, \dots, n_5 = n_0$  bezeichnet. Die Innenwinkel in den Ecken  $A_1, A_2, \dots, A_5$  seien  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ . Wie bei den Seiten werden wir bei den Winkeln die selben Symbole  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$  für die Winkel und die Größen der Winkel verwenden. Aus dem Zusammenhang ist jeweils ersichtlich, was mit dem Symbol gemeint ist.

Im letzten Abschnitt hatten wir festgestellt, dass jedes Viereck nur in einer Zerlegungsklasse liegt. Bei den Fünfecken taucht nun zum ersten Mal das Phänomen auf, dass ein Fünfeck auf ganz verschiedene Weise in unzerlegbare Summanden zerlegt werden kann. Damit gibt es Fünfecke, die in mehreren Zerlegungsklassen liegen können, wie folgendes Beispiel zeigt:

**Beispiel:**  $P$  sei ein Fünfeck mit einem Paar paralleler Seiten, wie es in Abbildung 12 dargestellt ist. Dann lässt sich das Fünfeck als Minkowskisumme eines Dreiecks mit einer Strecke darstellen. Andererseits lässt sich  $P$  auch in zwei Dreiecke zerlegen. Es handelt sich demzufolge um zwei wesentlich verschiedene Zerlegungen. Abbildung 12 zeigt die beiden Zerlegungen. Somit liegt  $P$  in mindestens zwei verschiedenen Zerlegungsklassen. Nach Bemerkung 3.17(i) auf Seite 70 liegt  $P$  damit bereits in unendlich vielen Zerlegungsklassen.



**Abbildung 12:** Zwei Möglichkeiten der Zerlegung eines Fünfecks

**Frage:** Welche Fünfecke liegen nur in einer Zerlegungsklasse?

Eine erste Antwort auf die Frage liefert der folgende Satz 3.20, der nicht nur für Fünfecke gilt.

**Satz 3.20:** *Ist die Zerlegung eines Polygons  $P$  in unzerlegbare Summanden aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ , die nicht zueinander homothetisch sind, bis auf die Reihenfolge eindeutig, so liegt  $P$  in genau einer Zerlegungsklasse  $\mathfrak{T} \in \mathbb{V}$ .*

Der Beweis des Satzes ist trivial. Die Frage ist nun, ob darüber hinaus die Umkehrung gilt. Gibt es Polygone (oder hier zunächst Fünfecke), die wesentlich verschiedene Zerlegungen in unzerlegbare Summanden besitzen, aber trotzdem nur in einer Zerlegungsklasse liegen? Doch zunächst wollen wir diejenigen Fünfecke genauer charakterisieren, deren Zerlegung in unzerlegbare Summanden eindeutig ist.

Ist  $Q$  ein maximaler Summand eines Polytops  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , so ist natürlich jedes Translat von  $Q$  ein maximaler Summand von  $P$ . Bei den folgenden Untersuchungen brauchen wir jedoch jeweils nur einen Vertreter aus der Familie aller zu  $Q$  translationsgleicher Polygone. Deshalb beschränken wir uns bei den folgenden Ausführungen auf Polygone, deren Steinerpunkte im Ursprung liegen. Die Menge dieser Polygone hatten wir in Bemerkung 3.1 (iv) auf Seite 22 mit  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  bezeichnet. Dabei sollen sowohl die untersuchten Polygone, als auch die einzelnen Zerlegungsteile aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  sein.

**Satz 3.21:** *Für ein Fünfeck  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) *Die Zerlegung von  $P$  in unzerlegbaren Summanden aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ , die nicht zueinander homothetisch sind, ist (bis auf die Reihenfolge) eindeutig.*
- (2)  *$P$  besitzt höchstens 3 maximale unzerlegbare Summanden (in  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ).*
- (3)  *$P$  besitzt genau 3 maximale unzerlegbare Summanden (in  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ).*

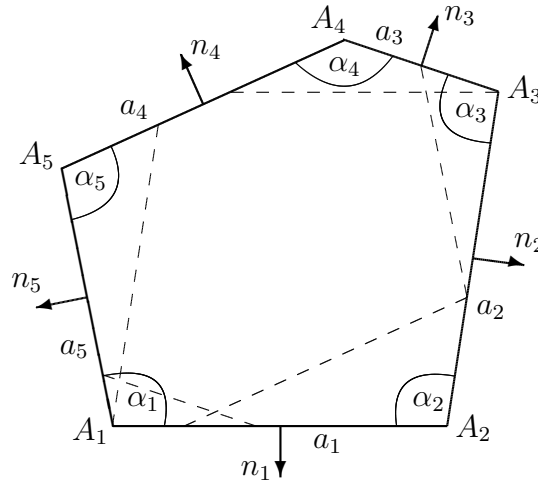
- (4)  $P$  ist Minkowskisumme aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ).
- (5)  $P$  besitzt drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$ , sodass  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 \leq \pi$  gilt.
- (6)  $P$  besitzt zwei Paare benachbarter Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sowie  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sodass  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$  und  $\beta_1 + \beta_2 \leq \pi$  gilt.

BEWEIS: Wir zeigen zunächst die Äquivalenz von (5) und (6). Da die Aussage (6) stärker ist, genügt es zu zeigen, dass daraus die Aussage (5) folgt. Der Winkel  $\beta_1$  entspricht einem  $\alpha_k$  für ein  $k \in \{1, \dots, 5\}$  und der Winkel  $\beta_2$  ist dann gleich  $\alpha_{k+1}$ . Wir nehmen an, die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  und  $\beta_2$  seien paarweise verschieden. Damit ist  $k = 3$  oder  $k = 4$ . Für die Größen der Winkel gilt nach Voraussetzung  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$  und  $\beta_1 + \beta_2 \leq \pi$ . Damit gilt für die Summe der vier Winkel  $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \leq 2\pi$ . Für die Innenwinkelsumme in einem Fünfeck gilt jedoch  $\sum_{i=1}^5 \alpha_i = 3\pi$ . Damit gilt für den übrig bleibenden Winkel  $\alpha_3 \geq \pi$  oder  $\alpha_5 \geq \pi$ . Dies kann jedoch nicht sein, da Innenwinkel stets kleiner als  $\pi$  sind. Also müssen zwei der vier Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  übereinstimmen. Damit gibt es drei benachbarte Winkel mit der geforderten Eigenschaft.

Um die Äquivalenz der anderen Aussagen zu zeigen, unterscheiden wir, abhängig von der Winkelsumme benachbarter Winkel verschiedene Fälle.

**1. Fall:** Die Winkelsumme zweier benachbarter Winkel ist stets größer als  $\pi$ .

Damit sind die Eigenschaften (5) und (6) nicht erfüllt. Ein entsprechendes Fünfeck ist in Abbildung 13 dargestellt. Außerdem besitzt  $P$  dann keine zueinander parallelen Seiten.



**Abbildung 13:** Fünfeck mit  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 1, \dots, 5$ )

Demzufolge ist jeder nichttriviale unzerlegbare Summand ein Dreieck. Ist ein Dreieck  $D$  ein Summand von  $P$ , so sind die Normalenrichtungen der Seiten von  $D$  weiterhin Normalenrichtungen der Seiten von  $P$ . Da die Winkelsumme zweier benachbarter Winkel größer als  $\pi$  ist, können dies jedoch nicht die Normalenrichtungen dreier aneinander

liegender Seiten sein. Nun sind Dreiecke bis auf Homothetien durch die Angabe ihrer Normalenrichtungen bestimmt. Damit gibt es nur die folgenden fünf maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ) von  $P$ :

Dreieck	zugehörige Normalenrichtungen
$D_1$	$n_1, n_3, n_4$
$D_2$	$n_2, n_4, n_5$
$D_3$	$n_3, n_5, n_1$
$D_4$	$n_4, n_1, n_2$
$D_5$	$n_5, n_2, n_3$

Auf Grund der Winkelbedingungen gibt es stets Summanden mit diesen Normaleneinheitsvektoren. Damit gibt es genau fünf maximale unzerlegbare Summanden (in  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ). Infolge dessen gilt weder die Eigenschaft (2) noch (3). Wir bezeichnen die Seiten von  $D_1$  mit  $s_1, s_3$  und  $s_4$ , wobei die Indizes mit denen der zugehörigen Normaleneinheitsvektoren übereinstimmen sollen. Da  $D_1$  der maximale Summand von  $P$  mit diesen Normalenrichtungen ist, gilt für die Länge der Seiten  $s_1 = a_1, s_3 = a_3$  oder  $s_4 = a_4$ . O. B. d. A. sei  $s_1 = a_1$ . Dann besitzen  $D_3$  und  $D_4$  ebenfalls Seiten mit der Normalenrichtung  $n_1$ .

Wir nehmen nun an,  $P$  sei Summe aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ).  $P$  habe somit die Darstellung  $P = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 \oplus D_5$ . Mit Hilfe von Lemma 2.2 (iii) erhalten wir damit für die Seiten in Richtung  $n_1$  folgende Darstellung:

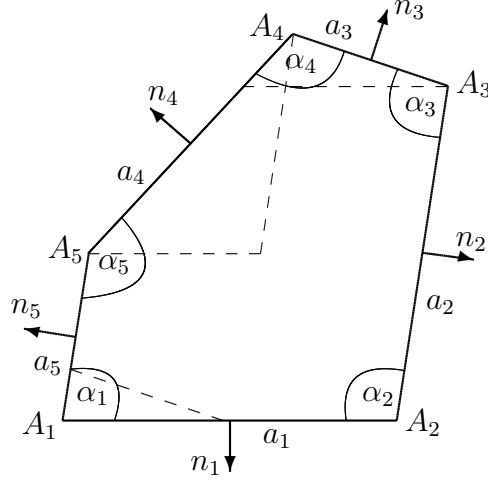
$$F_P(n_1) = F_{D_1}(n_1) \oplus F_{D_2}(n_1) \oplus F_{D_3}(n_1) \oplus F_{D_4}(n_1) \oplus F_{D_5}(n_1).$$

Nun ist  $F_P(n_1) = a_1$  und  $F_{D_1}(n_1) = s_1$ . Da  $D_2$  und  $D_5$  keine Seiten in Richtung  $n_1$  besitzen, sind  $F_{D_2}(n_1)$  und  $F_{D_5}(n_1)$  jeweils nur einpunktige Mengen. Da  $D_3$  und  $D_4$  ebenfalls Seiten mit der Normalenrichtung  $n_1$  besitzen, haben  $F_{D_3}(n_1)$  und  $F_{D_4}(n_1)$  jeweils eine positive Länge. Da jedoch  $a_1$  und  $s_1$  die gleiche Länge besitzen, erhalten wir einen Widerspruch. Demnach gilt nicht die Eigenschaft (4).

Damit ist aber die Darstellung von  $P$  als Minkowskisumme unzerlegbarer Polygone nicht eindeutig. Jede Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Polygone hat nun die Gestalt  $P = \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3 \oplus \lambda_4 D_4 \oplus \lambda_5 D_5$  mit gewissen Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \in [0, 1]$ . Wählen wir nun  $\lambda_1 = 1$ , so müssen  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  jeweils Null sein, da  $D_3$  und  $D_4$  ebenfalls Seiten mit der Normalenrichtung  $n_1$  besitzen und o. B. d. A.  $s_1 = a_1$  war. Folglich besitzt  $P$  die Darstellung  $P = D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_5 D_5$  mit gewissen Koeffizienten  $\lambda_2, \lambda_5 \in [0, 1]$ . Andererseits ist aber auch  $D_3$  ein maximaler Summand. Demnach besitzt  $P$  eine Darstellung  $P = \mu_1 D_1 \oplus \mu_2 D_2 \oplus D_3 \oplus \mu_4 D_4 \oplus \mu_5 D_5$  mit gewissen Koeffizienten  $\mu_1, \mu_2, \mu_4, \mu_5 \in [0, 1]$ . Diese ist von der ersten Darstellung wesentlich verschieden. Somit ist auch die Eigenschaft (1) nicht erfüllt.

**2. Fall:** Es gibt genau ein Paar benachbarter Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ . Für alle anderen Paare benachbarter Winkel gelte  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 2, \dots, 5$ ).

Die Eigenschaften (5) und (6) sind damit nicht erfüllt. Wir haben damit eine Situation, wie sie in Abbildung 14 dargestellt ist. Die Seiten  $a_2$  und  $a_5$  liegen parallel zueinander.  $S$  sei nun die Strecke deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und die parallel zu  $a_2$  und



**Abbildung 14:** Fünfeck mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 2, \dots, 5$ )

$a_5$  liegt mit der Länge der kleineren der beiden Strecken. Dann ist  $S$  offensichtlich ein maximaler Summand von  $P$ . O. B. d. A. besitze  $S$  dieselbe Länge wie  $a_5$ . Alle anderen maximalen unzerlegbaren Summanden sind Dreiecke. Ist ein Dreieck  $D$  ein maximaler Summand, so können, ebenso wie im 1. Fall, die Normalenrichtungen von  $D$  nicht die Normalenrichtungen dreier anliegender Seiten sein. Außerdem können  $n_2$  und  $n_5$  nicht beide zu  $D$  gehören. Damit muss  $D$  eine Seite in Richtung  $n_1$  besitzen. Es gibt somit genau drei Dreiecke  $D_1, D_2, D_3 \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ , die maximale unzerlegbare Summanden von  $P$  sind. Diese besitzen die folgenden Normaleneinheitsvektoren:

Dreieck	zugehörige Normalenrichtungen
$D_1$	$n_1, n_2, n_4$
$D_2$	$n_1, n_3, n_4$
$D_3$	$n_1, n_3, n_5$

Infolge dessen hat das Fünfeck genau vier maximale unzerlegbare Summanden. Damit gelten nicht die Eigenschaften (2) und (3).

Wir nehmen wieder an,  $P$  sei die Summe aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ).  $P$  habe demnach die Darstellung  $P = S \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ . Mit Hilfe von Lemma 2.2 (iii) erhalten wir damit für die Seiten in Richtung  $n_5$  folgende Darstellung:

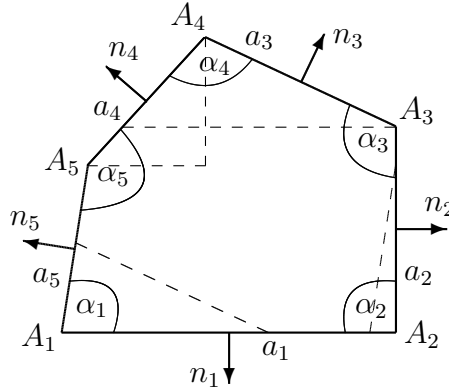
$$F_P(n_5) = F_S(n_5) \oplus F_{D_1}(n_5) \oplus F_{D_2}(n_5) \oplus F_{D_3}(n_5).$$

Nun ist  $F_P(n_5) = a_5$  und  $F_S(n_5)$  besitzt dieselbe Länge. Da  $D_1$  und  $D_2$  keine Seiten in Richtung  $n_5$  besitzen sind  $F_{D_1}(n_5)$  und  $F_{D_2}(n_5)$  jeweils nur einpunktige Mengen. Aber  $D_3$  besitzt eine Seite in Richtung  $n_5$ . Somit besitzt  $F_{D_3}(n_5)$  eine positive Länge. Damit erhalten wir einen Widerspruch und Eigenschaft (4) gilt ebenfalls nicht.

Wir können nun leicht zwei verschiedene Zerlegungen von  $P$  in unzerlegbare Polygone angeben, die nicht zueinander homothetisch sind. Jede solche Zerlegung hat die Gestalt  $P = \lambda_0 S \oplus \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3$  mit gewissen Koeffizienten  $\lambda_0, \dots, \lambda_3 \in [0, 1]$ . Wählen

wir nun  $\lambda_0 = 1$ , so muss  $\lambda_3 = 0$  sein, da  $D_3$  ebenfalls eine Seite in Richtung  $n_5$  besitzt. Damit haben wir für  $P$  die Darstellung  $P = S \oplus \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2$ , mit gewissen Koeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ . Wählen wir andererseits  $\lambda_3 = 1$ , so erhalten wir die Darstellung  $P = \mu_0 S \oplus \mu_1 D_1 \oplus \mu_2 D_2 \oplus D_3$ , mit gewissen Koeffizienten  $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$ . Demzufolge ist die Eigenschaft (1) nicht erfüllt.

**3. Fall:** Es gibt genau ein Paar benachbarter Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$ . Für alle anderen Paare benachbarter Winkel gelte  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 2, \dots, 5$ ). Die Eigenschaften (5) und (6) sind hier ebenfalls nicht erfüllt. Damit haben wir eine Situation, wie sie in Abbildung 15 dargestellt ist.  $P$  besitzt dann keine zueinander par-



**Abbildung 15:** Fünfeck mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  und  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 2, \dots, 5$ )

allelen Seiten. Folglich sind alle unzerlegbaren Summanden Dreiecke. Jedes Dreieck, das Summand von  $P$  ist, besitzt eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_1$ : Wir nehmen an, es gibt ein Dreieck  $\tilde{D}$ , welches Summand von  $P$  ist, aber keine Seite in Richtung  $n_1$  besitzt. Dann besitzt es Seiten in drei der vier Normalenrichtungen  $n_2, n_3, n_4, n_5$ . Das können jedoch nicht drei anliegende Seiten sein, da die Winkelsumme zweier benachbarter Winkel zwischen diesen Seiten stets größer als  $\pi$  ist. Deshalb nehmen wir nun an, dass  $\tilde{D}$  die Normalenrichtungen  $n_2, n_3$  und  $n_5$  besitzt. Dann besitzt der Innenwinkel zwischen den Seiten  $F_{\tilde{D}}(n_2)$  und  $F_{\tilde{D}}(n_3)$  die Größe  $\alpha_3$ . Der Innenwinkel zwischen  $F_{\tilde{D}}(n_3)$  und  $F_{\tilde{D}}(n_5)$  besitzt somit die Größe  $\pi - ((\pi - \alpha_4) + (\pi - \alpha_5)) = \alpha_4 + \alpha_5 - \pi$ . Demnach ist die Summe dieser beiden Winkelgrößen gleich  $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \pi$ . Da die Winkelsumme im Fünfeck gleich  $3\pi$  ist, erhalten wir für die Summe dieser beiden Winkel  $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \pi = 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)$ . Diese Winkelsumme ist jedoch größer als  $\pi$ , da  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  ist. Folglich können  $n_2, n_3$  und  $n_5$  nicht die Normalenrichtungen eines Dreiecks sein. Ebenso zeigt man, dass  $n_2, n_4$  und  $n_5$  nicht die Normalenrichtungen eines Dreiecks sein können. Daher besitzt jedes Dreieck, welches Summand von  $P$  ist, eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_1$ .

Es kann deshalb nur vier Dreiecke  $D_1, D_2, D_3, D_4 \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  geben, die maximale unzerlegbare Summanden von  $P$  sind. Diese besitzen die folgenden Normaleneinheitsvektoren:

Dreieck	zugehörige Normalenrichtungen
$D_1$	$n_1, n_2, n_4$
$D_2$	$n_1, n_2, n_5$
$D_3$	$n_1, n_3, n_4$
$D_4$	$n_1, n_3, n_5$

Auf Grund der Winkelbedingungen existieren stets maximale Summanden mit diesen Normaleneinheitsvektoren. Damit gelten nicht die Eigenschaften (2) und (3).

Wir bezeichnen die Seiten von  $D_1$  mit  $s_1, s_2$  und  $s_4$ , wobei die Indizes mit denen der zugehörigen Normaleneinheitsvektoren übereinstimmen sollen. Da  $D_1$  der maximale Summand von  $P$  mit diesen Normalenrichtungen ist, gilt für die Länge der Seiten  $s_1 = a_1, s_2 = a_2$  oder  $s_4 = a_4$ . O. B. d. A. sei  $s_2 = a_2$ . Dann besitzt  $D_2$  ebenfalls eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_2$ .

Wir nehmen wieder an,  $P$  sei die Summe aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ).  $P$  habe also die Darstellung  $P = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4$ . Mit Hilfe von Lemma 2.2 (iii) erhalten wir damit für die Seiten in Richtung  $n_2$  folgende Darstellung:

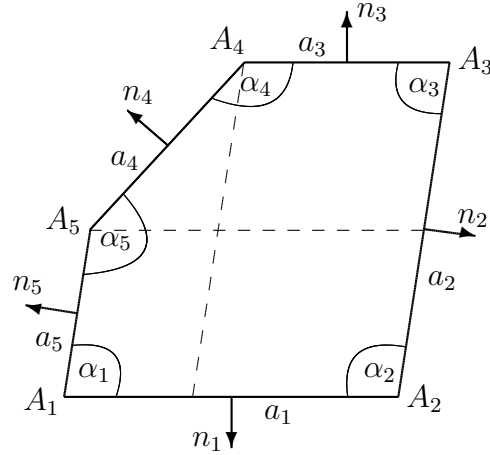
$$F_P(n_2) = F_{D_1}(n_2) \oplus F_{D_2}(n_2) \oplus F_{D_3}(n_2) \oplus F_{D_4}(n_2).$$

Nun ist  $F_P(n_2) = a_2$  und  $F_{D_1}(n_2) = s_2$ . Da  $D_3$  und  $D_4$  keine Seiten in Richtung  $n_2$  besitzen, sind  $F_{D_3}(n_2)$  und  $F_{D_4}(n_2)$  jeweils nur einpunktige Mengen. Da  $D_2$  jedoch ebenfalls eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_2$  besitzt, hat  $F_{D_2}(n_2)$  eine positive Länge. Da jedoch  $a_1$  und  $s_1$  die gleiche Länge besitzen, erhalten wir einen Widerspruch. Somit gilt nicht die Eigenschaft (4).

Wir können nun leicht zwei verschiedene Zerlegungen von  $P$  in unzerlegbare Polygone angeben, die nicht zueinander homothetisch sind. Jede solche Zerlegung hat die Gestalt  $P = \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3 \oplus \lambda_4 D_4$  mit gewissen Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in [0, 1]$ . Wählen wir nun  $\lambda_1 = 1$ , so muss  $\lambda_2 = 0$  sein, da  $D_2$  ebenfalls eine Seite in Richtung  $n_2$  besitzt. Damit haben wir für  $P$  die Darstellung  $P = D_1 \oplus \lambda_3 D_3 \oplus \lambda_4 D_4$ , mit gewissen Koeffizienten  $\lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ . Wählen wir andererseits  $\lambda_2 = 1$ , so erhalten wir die Darstellung  $P = \mu_1 D_1 \oplus D_2 \oplus \mu_3 D_3 \oplus \mu_4 D_4$ , mit gewissen Koeffizienten  $\mu_1, \mu_3, \mu_4 \in [0, 1]$ . Demnach ist die Eigenschaft (1) ebenfalls nicht erfüllt.

**4. Fall:** Es gibt drei benachbarter Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ . Die Eigenschaften (5) und (6) sind hier erfüllt. Damit haben wir eine Situation, wie sie in Abbildung 16 dargestellt ist. Die Seiten  $a_1$  und  $a_3$  liegen parallel zueinander.  $S_1$  sei nun die Strecke deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und die parallel zu  $a_1$  und  $a_3$  liegt mit der Länge der kleineren der beiden Strecken. Dies ist offenbar  $a_3$ . Dann ist  $S_1$  offensichtlich ein maximaler Summand von  $P$ . Ebenso liegen die beiden Seiten  $a_2$  und  $a_5$  parallel zueinander.  $S_2$  sei nun die Strecke deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und die parallel zu  $a_2$  und  $a_5$  liegt mit der Länge von  $a_5$ . Dann ist  $S_2$  ebenso ein maximaler Summand von  $P$ .

Jedes Dreieck, das Summand von  $P$  ist, besitzt jeweils eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_1$  und  $n_2$ : Wir nehmen an, es gibt ein Dreieck  $\tilde{D}$ , welches Summand von  $P$



**Abbildung 16:** Fünfeck mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

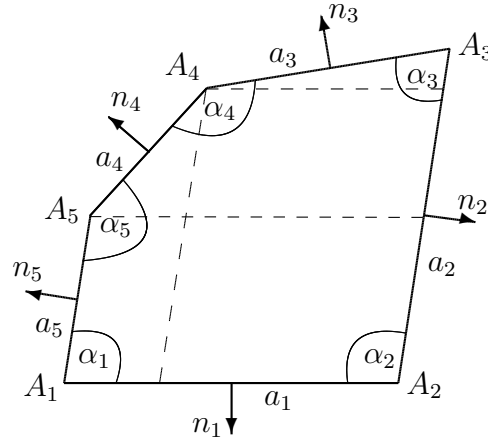
ist, aber keine Seite in Richtung  $n_1$  besitzt. Dann besitzt es Seiten in drei der vier Normalenrichtungen  $n_2, n_3, n_4, n_5$ . Das können aber nicht die Normalenrichtungen dreier anliegender Seiten sein, da für die Winkelsumme zweier benachbarter Winkel stets  $\alpha_i + \alpha_{i+1} \geq \pi$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) gilt. Andererseits können nicht gleichzeitig  $n_2$  und  $n_5$  Normalenrichtungen von Seiten von  $\tilde{D}$  sein, da  $n_2 = -n_5$  gilt. Folglich muss  $n_1$  Normaleneinheitsvektor einer Seite von  $\tilde{D}$  sein. Entsprechende Überlegungen kann man genauso für  $n_2$  anstellen. Damit muss jedes Dreieck  $D$ , welches ein Summand von  $P$  ist, Seiten mit den Normalenrichtungen  $n_1$  und  $n_2$  besitzen. Aus der Winkelbedingung  $\alpha_i + \alpha_{i+1} \geq \pi$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) folgt, dass weder  $n_1, n_2, n_3$  noch  $n_5, n_1, n_2$  Normalenrichtungen eines Dreiecks sein können. Deshalb muss die dritte Seite von  $D$  den Normaleneinheitsvektor  $n_4$  besitzen. Ein solcher Summand muss existieren, da die beiden anderen Summanden  $S_1$  und  $S_2$  keine Seiten in Richtung  $n_4$  besitzen.

$D$  sei nun der maximale Summand mit den drei Normalenrichtungen  $n_1, n_2$  und  $n_4$ . Dann gibt es genau die drei maximale Summanden  $S_1, S_2$  und  $D$ . Demnach sind die beiden Eigenschaften (2) und (3) erfüllt.

Wir müssen nun noch nachweisen, dass  $P$  tatsächlich die Summe aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ) ist. Da  $S_1, S_2$  und  $D$  die einzigen maximalen unzerlegbaren Summanden sind, hat jede Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden die Gestalt  $P = \lambda_1 S_1 \oplus \lambda_2 S_2 \oplus \lambda_3 D$ . Da  $D$  der einzige Summand ist, der eine Seite in Richtung  $n_4$  besitzt, muss  $\lambda_3 = 1$  sein. Andererseits ist  $S_1$  der einzige Summand, der eine Seite in Richtung  $n_3$  besitzt. Da  $S_1$  die gleiche Länge wie  $a_3$  besitzt, muss  $\lambda_1 = 1$  gelten. Außerdem ist  $S_2$  der einzige Summand, der eine Seite in Richtung  $n_5$  besitzt. Da  $S_2$  die gleiche Länge wie  $a_5$  besitzt, muss  $\lambda_2 = 1$  gelten. Infolge dessen haben wir für  $P$  die Darstellung  $P = S_1 \oplus S_2 \oplus D$ . Damit ist die Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden, die nicht zueinander homothetisch sind, auch (bis auf die Reihenfolge) eindeutig. Die beiden Eigenschaften (4) und (1) sind somit erfüllt.

**5. Fall:** Es gibt drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$ . Damit sind die beiden Eigenschaften (5) und (6) erfüllt. Dieser Fall ist in Abbildung 17





**Abbildung 17:** Fünfeck mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$

dargestellt. Die Seiten  $a_2$  und  $a_5$  liegen parallel zueinander.  $S$  sei nun die Strecke deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und die parallel zu  $a_2$  und  $a_5$  liegt mit der Länge der kleineren der beiden Strecken. Dies ist offenbar  $a_5$ . Dann ist  $S$  offensichtlich ein maximaler Summand von  $P$ .

Jedes Dreieck  $\tilde{D}$ , das Summand von  $P$  ist, besitzt jeweils eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_1$  und  $n_2$ : Wie im 4. Fall zeigt man, dass  $n_1$  Normaleneinheitsvektor von  $\tilde{D}$  ist. Wir nehmen an, es gibt ein Dreieck  $\tilde{D}$ , welches Summand von  $P$  ist, aber keine Seite in Richtung  $n_2$  besitzt. Dann besitzt es Seiten in drei der vier Normalenrichtungen  $n_3, n_4, n_5, n_1$ . Das können aber nicht die Normalenrichtungen dreier anliegender Seiten sein, da für die Winkelsumme zweier benachbarter Winkel  $\alpha_i + \alpha_{i+1} \geq \pi$  ( $i = 1, \dots, 5, i \neq 2$ ) gilt. Deshalb nehmen wir nun an, dass  $\tilde{D}$  die Normalenrichtungen  $n_1, n_3$  und  $n_5$  besitzt. Dann besitzt der Innenwinkel zwischen den Seiten  $F_{\tilde{D}}(n_1)$  und  $F_{\tilde{D}}(n_5)$  die Größe  $\alpha_1$ . Der Innenwinkel zwischen  $F_{\tilde{D}}(n_3)$  und  $F_{\tilde{D}}(n_5)$  besitzt dann die Größe  $\pi - ((\pi - \alpha_4) + (\pi - \alpha_5)) = \alpha_4 + \alpha_5 - \pi$ . Demzufolge ist die Summe dieser beiden Winkelgrößen gleich  $\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 - \pi$ . Da die Winkelsumme im Fünfeck gleich  $3\pi$  ist, erhalten wir für die Summe dieser beiden Winkel  $\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 - \pi = 2\pi - (\alpha_2 + \alpha_3)$ . Diese Winkelsumme ist jedoch größer als  $\pi$ , da  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$  ist. Somit können  $n_1, n_3$  und  $n_5$  nicht die Normalenrichtungen eines Dreiecks sein. Ebenso zeigt man, dass  $n_1, n_3$  und  $n_4$  nicht die Normalenrichtungen eines Dreiecks sein können. Demnach besitzt jedes Dreieck, welches ein Summand von  $P$  ist, eine Seite mit der Normalenrichtung  $n_2$ .

Da  $n_2 = -n_5$  ist, können  $n_1, n_2$  und  $n_5$  nicht Normalenrichtungen eines Dreiecks sein. Es gibt somit nur noch folgende zwei maximale unzerlegbare Summanden von  $P$ :

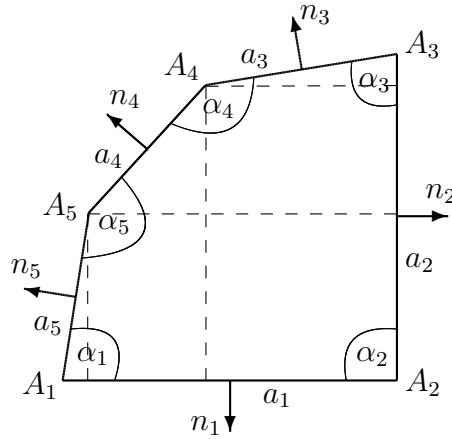
Dreieck	zugehörige Normalenrichtungen
$D_1$	$n_1, n_2, n_3$
$D_2$	$n_1, n_2, n_4$

Diese beiden Summanden müssen tatsächlich existieren, da  $S$  keine Seite in Richtung  $n_3$  bzw.  $n_4$  besitzt. Damit sind die beiden Eigenschaften (2) und (3) erfüllt.

Wir müssen nun noch nachweisen, dass  $P$  tatsächlich die Summe aller seiner maximalen

unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ) ist. Da  $S, D_1$  und  $D_2$  die einzigen maximalen unzerlegbaren Summanden sind, hat jede Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden die Gestalt  $P = \lambda_0 S \oplus \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2$ . Da  $D_1$  der einzige Summand ist, der eine Seite in Richtung  $n_3$  besitzt, muss  $\lambda_1 = 1$  sein. Andererseits ist  $D_2$  der einzige Summand, der eine Seite in Richtung  $n_4$  besitzt. Deshalb muss  $\lambda_2 = 1$  gelten. Außerdem ist  $S$  der einzige Summand, der eine Seite in Richtung  $n_5$  besitzt. Da  $S$  die gleiche Länge wie  $a_5$  besitzt, muss weiterhin  $\lambda_0 = 1$  gelten. Infolge dessen haben wir für  $P$  die Darstellung  $P = S \oplus D_1 \oplus D_2$ . Damit ist die Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden, die nicht zueinander homothetisch sind, auch (bis auf die Reihenfolge) eindeutig. Die beiden Eigenschaften (4) und (1) sind somit erfüllt.

**6. Fall:** Es gibt drei benachbarter Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$ . Damit sind die beiden Eigenschaften (5) und (6) erfüllt. Dieser Fall ist in Abbildung 18 dargestellt. Da stets  $\alpha_i + \alpha_{i+1} \neq \pi$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) gilt, gibt es keine Seiten, die zueinander



**Abbildung 18:** Fünfeck mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$

parallel liegen. Folglich sind alle unzerlegbaren Summanden von  $P$  Dreiecke. Wie im 5. Fall zeigt man, dass jedes Dreieck, das Summand von  $P$  ist, Seiten mit den Normalenrichtungen  $n_1$  und  $n_2$  besitzt. Damit sind folgende maximale unzerlegbare Summanden möglich:

Dreieck	zugehörige Normalenrichtungen
$D_1$	$n_1, n_2, n_3$
$D_2$	$n_1, n_2, n_4$
$D_3$	$n_1, n_2, n_5$

Diese Summanden müssen existieren, da das Dreieck  $D_1$  der einzige der möglichen Summanden ist, der eine Seite in Richtung  $n_3$  besitzt. Ebenso besitzt nur  $D_2$  eine Seite in Richtung  $n_4$  und nur  $D_3$  eine Seite in Richtung  $n_5$ . Damit sind die beiden Eigenschaften (2) und (3) erfüllt.

Wir müssen nun noch nachweisen, dass  $P$  tatsächlich die Summe aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ) ist. Da  $D_1, D_2$  und  $D_3$  die einzigen maximalen

unzerlegbaren Summanden sind, hat jede Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden die Gestalt  $P = \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3$ . Da  $D_1$  der einzige Summand ist, der eine Seite in Richtung  $n_3$  besitzt, muss  $\lambda_1 = 1$  sein. Andererseits ist  $D_2$  der einzige Summand, der eine Seite in Richtung  $n_4$  besitzt. Deshalb muss weiter  $\lambda_2 = 1$  gelten. Da außerdem  $D_3$  der einzige Summand ist, der eine Seite in Richtung  $n_5$  besitzt, muss ebenfalls  $\lambda_3 = 1$  gelten. Folglich haben wir für  $P$  die Darstellung  $P = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ . Damit ist die Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden, die nicht zueinander homothetisch sind, auch (bis auf die Reihenfolge) eindeutig. Die beiden Eigenschaften (4) und (1) sind somit ebenfalls erfüllt. q.e.d.

Ist eine (und damit jede) der Bedingungen aus Satz 3.21 erfüllt, so lassen sich die Zerlegungen in unzerlegbare Summanden genauer angeben.

**Satz 3.22:** (i) Ein Fünfeck  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  besitzt genau dann drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$ , wenn  $P$  die Darstellung  $P = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$  besitzt. Dabei sind  $D_1, D_2$  und  $D_3$  zueinander nicht homothetische Dreiecke, welche einen gemeinsamen Winkel der Größe  $\alpha_2$  besitzen. Diese Winkel liegen zueinander translationsgleich (homothetisch).

(ii) Ein Fünfeck  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  besitzt genau dann drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$  (oder umgekehrt), wenn  $P$  die Darstellung  $P = D_1 \oplus D_2 \oplus S$  besitzt. Dabei sind  $D_1$  und  $D_2$  zwei zueinander nicht homothetische Dreiecke, welche einen gemeinsamen Winkel der Größe  $\alpha_2$  besitzen. Diese Winkel liegen zueinander translationsgleich (homothetisch). Weiter ist  $S$  eine Strecke, welche zu einem der beiden Schenkel dieses gemeinsamen Winkels parallel liegt.

(iii) Ein Fünfeck  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  besitzt genau dann drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ , wenn  $P$  die Darstellung  $P = D \oplus S_1 \oplus S_2$  besitzt. Dabei ist  $D$  ein Dreieck und  $S_1$  und  $S_2$  sind Strecken, welche zu je einem der Schenkel des Dreiecks parallel liegen. Der eingeschlossene Winkel besitzt dabei die Größe  $\alpha_2$ .

BEWEIS: dass diese Fünfecke jeweils eine solche Darstellung besitzen, geht aus dem Beweis von Satz 3.21 (Fälle 4, 5 und 6) hervor. Es ist somit nur noch zu zeigen, dass die Minkowskisummen dieser Strecken und Dreiecke jeweils Fünfecke mit den entsprechenden Winkelbedingungen sind.

(i) Es sei  $P = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ , wobei  $D_1, D_2$  und  $D_3$  zueinander nicht homothetische Dreiecke sind, welche einen gemeinsamen Winkel der Größe  $\alpha_2$  besitzen, die translationsgleich (homothetisch) zueinander liegen. Wir müssen nun zeigen, dass  $P$  ein Fünfeck ist und die Winkelbedingungen  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$  gelten.

Für die Dreiecke  $D_1, D_2$  und  $D_3$  führen wir folgende Bezeichnungen ein. Die Ecken von  $D_1$  bezeichnen wir mit  $A_1, A_2, A_3$  (wie üblich im positiven Umlaufsinn), die Ecken von  $D_2$  mit  $B_1, B_2, B_3$  und die Ecken von  $D_3$  mit  $C_1, C_2, C_3$ . Den Innenwinkel der Ecke  $A_1$  bezeichnen wir mit  $\tilde{\alpha}_1$  und entsprechend für die anderen Ecken. Diese sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Dreieck	Ecken	Innenwinkel	Normalenrichtungen
$D_1$	$A_1, A_2, A_3$	$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$	$n_1, n_2, n_3$
$D_2$	$B_1, B_2, B_3$	$\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3$	$n_1, n_2, n_4$
$D_3$	$C_1, C_2, C_3$	$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$	$n_1, n_2, n_5$

Dabei gilt nach Voraussetzung  $\tilde{\alpha}_2 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\gamma}_2$ . Die Normalenrichtungen von  $D_1$  bezeichnen wir mit  $n_1, n_2$  und  $n_3$ . Dabei ist  $n_1$  die Normalenrichtung der Seite  $\overline{A_1A_2}$ ,  $n_2$  die Normalenrichtung von  $\overline{A_2A_3}$  und  $n_3$  die Normalenrichtung von  $\overline{A_3A_1}$ . Außerdem liegen die drei Winkel  $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_2$  translationsgleich zueinander. Deshalb besitzen alle drei Dreiecke jeweils Seiten mit den Normalenrichtungen  $n_1$  und  $n_2$ . Mit  $n_4$  bzw.  $n_5$  bezeichnen wir die weiteren Normalenrichtungen von  $D_2$  bzw.  $D_3$ . Da die drei Dreiecke nach Voraussetzung nicht homothetisch zueinander liegen, sind die Normalenrichtungen  $n_3, n_4$  und  $n_5$  verschieden voneinander und von  $n_1, n_2$ . Aus diesem Grund besitzt  $P$  genau fünf verschiedene Normalenrichtungen und ist damit ein Fünfeck.

Da die Winkel  $\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_2$  translationsgleich sind, besitzt  $P$  einen Winkel, der translationsgleich zu diesen ist. Diesen bezeichnen wir mit  $\alpha_2$ . Da die drei Dreiecke jedoch nicht homothetisch zueinander liegen, besitzen die Winkel  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_1$  jeweils verschiedene Größen. O. b. d. A. sei  $\tilde{\alpha}_1 > \tilde{\beta}_1 > \tilde{\gamma}_1$ . Dann ist auch  $\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\beta}_3 < \tilde{\gamma}_3$ . Dabei ist der Winkel  $\tilde{\alpha}_1$  nicht nur vom Betrag her größer als die beiden Winkel  $\tilde{\alpha}_2$  und  $\tilde{\alpha}_3$ , sondern er umfasst die beiden anderen Winkel auch (eventuell nach einer geeigneten Translation) im Sinne einer mengentheoretischen Inklusion. Deshalb entsteht bei der Bildung der Minkowskisumme dieser drei Winkel wieder ein Winkel der translationsgleich zu  $\tilde{\alpha}_1$  ist. Deshalb ist  $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1$ . Wir erhalten damit für die Summe  $\alpha_1 + \alpha_2 = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 < \pi$  und die erste Bedingung ist erfüllt.

Aus demselben Grund ist  $\alpha_3 = \tilde{\gamma}_3$ . Damit gilt  $\alpha_2 + \alpha_3 = \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_3 < \pi$  und auch die zweite Bedingung ist erfüllt.

(ii) und (iii): Die anderen beiden Aussagen kann man analog beweisen. q.e.d.

**Frage:** Gilt die Umkehrung von Satz 3.20 ebenso?

Es liege  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  in genau einer Zerlegungsklasse  $\overline{\mathfrak{T}} \in \mathbb{V}$ . Ist dann die Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ) eindeutig?

**Antwort:** Nein!

Dazu schauen wir uns folgendes Beispiel an:

**Beispiel:** Es sei  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  ein gleichwinkliges Fünfeck. Dann erfüllt  $P$  offensichtlich nicht die Bedingungen aus Satz 3.21. Damit ist die Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden nicht eindeutig. Da das Fünfeck jedoch gleichwinklig ist, sind alle unzerlegbaren Summanden Dreiecke  $D_1, \dots, D_5$ , die zueinander ähnlich sind. Für jede Zerlegung  $P = \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3 \oplus \lambda_4 D_4 \oplus \lambda_5 D_5$  kann man durch geeignete Bewegungen  $\beta_2, \dots, \beta_5 \in \mathcal{B}_2$  erreichen, dass  $\lambda_1 D_1 \oplus \beta_2(\lambda_2 D_2) \oplus \beta_3(\lambda_3 D_3) \oplus \beta_4(\lambda_4 D_4) \oplus \beta(\lambda_5 D_5) = \lambda D_1$

für ein geeignetes  $\tilde{\lambda} > 0$  ist. Somit sind  $P$  und  $\tilde{\lambda}D_1$  zerlegungsgleich. Deshalb müssen sie nach Satz 3.1 die gleiche mittlere Breite haben. Da das für jede beliebige Zerlegung in unzerlegbare Summanden gilt, liegt  $P$  nur in der Zerlegungsklasse  $\overline{\mathfrak{T}}$  für  $\mathfrak{T} = \{\tilde{\lambda}D_1\}$ .

Die gleichwinkligen Fünfecke sind allerdings die einzigen Fünfecke mit dieser Eigenschaft, wie der folgende Satz zeigt:

**Satz 3.23:** *Ein Fünfeck  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  liegt genau dann in nur einer Zerlegungsklasse  $\overline{\mathfrak{T}} \in \mathbb{V}$ , wenn es eine der (und damit alle) Bedingungen aus Satz 3.21 erfüllt oder ein gleichwinkliges Fünfeck ist.*

BEWEIS: Ist  $P$  ein gleichwinkliges Fünfeck, so haben wir gesehen, dass alle unzerlegbaren Summanden zueinander ähnliche Dreiecke sind und  $P$  somit nur in einer Zerlegungsklasse liegt. Deshalb sei  $P$  nun ein Fünfeck, bei dem verschiedene Innenwinkelgrößen vorkommen. Wie im Beweis von Satz 3.21 unterscheiden wir wieder, abhängig von der Winkelsumme benachbarter Winkel, verschiedene Fälle.

**1. Fall:** Die Winkelsumme zweier benachbarter Winkel ist stets größer als  $\pi$ . Weiter wollen wir annehmen, dass das Fünfeck einen Winkel besitzt, dessen Größe nur einmal vorkommt. O. B. d. A. sei dies  $\alpha_1$ .

Im Beweis von Satz 3.21 wurde gezeigt, dass  $P$  dann genau fünf maximale unzerlegbare Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ) besitzt. In Abbildung 19 ist als Beispiel das Dreieck  $D_4$  eingezeichnet. Dieses ist der maximale unzerlegbare Summand mit den Normalenrichtungen  $n_4, n_1$  und  $n_2$ , bei dem der Steinerpunkt im Ursprung liegt. Dieses ist offensichtlich translationsgleich zum Dreieck  $\tilde{D}_4 = \triangle A_4 B_3 B_5$ . Das Dreieck  $\tilde{D}_4$  ist wiederum ähnlich zum Dreieck  $\triangle A_4 B'_3 B'_5$ . An diesem können jetzt leicht die Winkelgrößen des Dreiecks bestimmt werden. Demnach besitzt das Dreieck  $D_4$  die Winkelgrößen  $\alpha_4, \beta_3$  und  $\beta_5$ . Für  $\beta_3$  erhält man die Beziehung  $\beta_3 = \pi - (\pi - \alpha_5) - (\pi - \alpha_1) = \alpha_5 + \alpha_1 - \pi$  und für  $\beta_5$  entsprechend  $\beta_5 = \pi - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_3) = \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$ . Für alle anderen maximalen unzerlegbaren Summanden sind diese Angaben in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Dreieck	kongruent zu	ähnlich zu	Normalenrichtungen	Winkel
$D_1$	$\triangle A_1 B_5 B_2$	$\triangle A_1 B'_5 B'_2$	$n_1, n_3, n_4$	$\alpha_1, \beta_5, \beta_2$
$D_2$	$\triangle A_2 B_1 B_3$	$\triangle A_2 B'_1 B'_3$	$n_2, n_4, n_5$	$\alpha_2, \beta_1, \beta_3$
$D_3$	$\triangle A_3 B_2 B_4$	$\triangle A_3 B'_2 B'_4$	$n_3, n_5, n_1$	$\alpha_3, \beta_2, \beta_4$
$D_4$	$\triangle A_4 B_3 B_5$	$\triangle A_4 B'_3 B'_5$	$n_4, n_1, n_2$	$\alpha_4, \beta_3, \beta_5$
$D_5$	$\triangle A_5 B_4 B_1$	$\triangle A_5 B'_4 B'_1$	$n_5, n_2, n_3$	$\alpha_5, \beta_4, \beta_1$

Zwischen den Winkelgrößen bestehen dabei folgende Beziehungen:

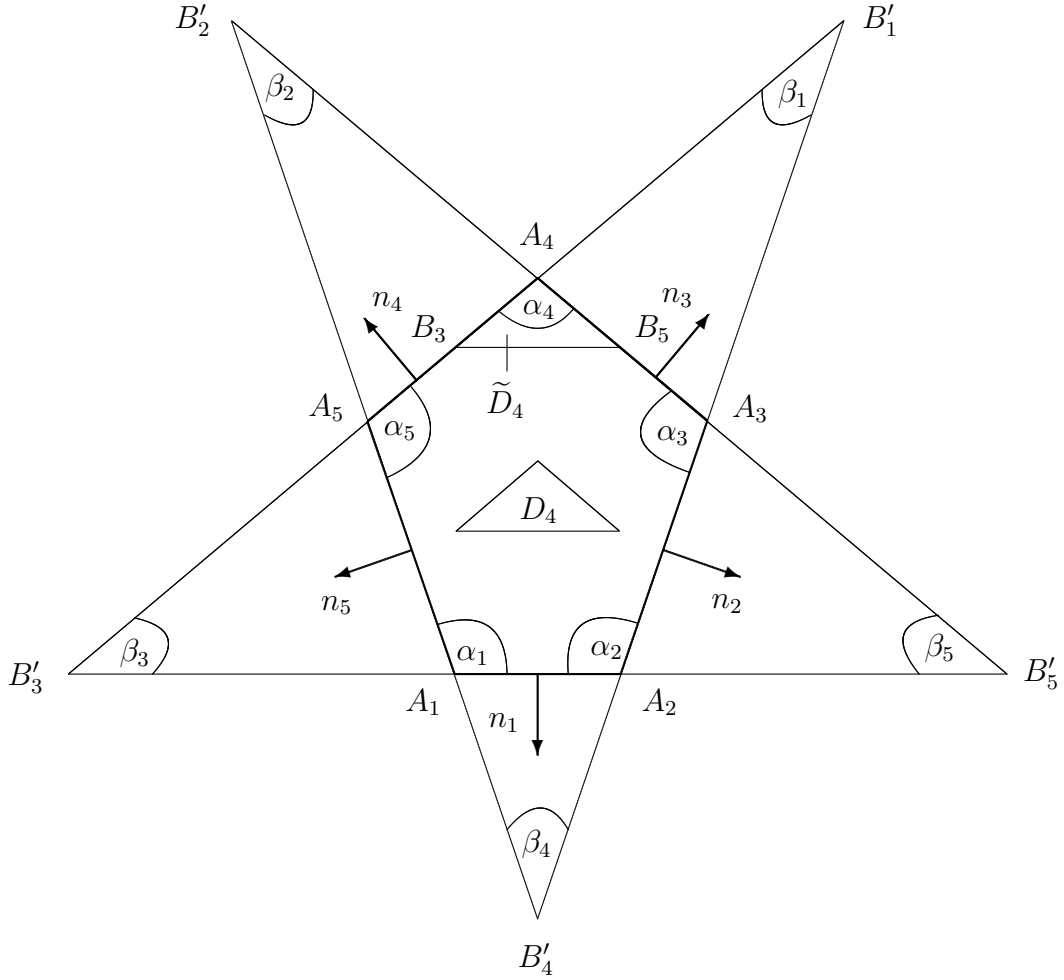
$$\beta_1 = \alpha_3 + \alpha_4 - \pi$$

$$\beta_2 = \alpha_4 + \alpha_5 - \pi$$

$$\beta_3 = \alpha_5 + \alpha_1 - \pi$$

$$\beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 - \pi$$

$$\beta_5 = \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$



**Abbildung 19:** Fünfeck  $P$  mit dem maximalen unzerlegbaren Summanden  $D_4$

Wir zeigen nun, dass  $D_1$  nicht ähnlich ist zu den anderen Dreiecken  $D_2, D_3, D_4$  und  $D_5$ . Dazu nehmen wir zunächst an, dass  $D_1$  und  $D_2$  ähnlich sind. Da die Größe von  $\alpha_1$  verschieden ist von der Größe aller anderen Winkel, gilt insbesondere  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Damit gibt es noch vier Möglichkeiten, welche Winkelgrößen übereinstimmen. Diese sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

1. Fall:  $\alpha_1 = \beta_1, \beta_5 = \alpha_2, \beta_2 = \beta_3$
2. Fall:  $\alpha_1 = \beta_1, \beta_5 = \beta_3, \beta_2 = \alpha_2$
3. Fall:  $\alpha_1 = \beta_3, \beta_5 = \alpha_2, \beta_2 = \beta_1$
4. Fall:  $\alpha_1 = \beta_3, \beta_5 = \beta_1, \beta_2 = \alpha_2$

1. Fall:  $\alpha_1 = \beta_1, \beta_5 = \alpha_2, \beta_2 = \beta_3$ . Dann gilt  $\alpha_2 = \beta_5 = \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$ . Damit wäre  $\alpha_3 = \pi$  und wir erhalten einen Widerspruch.

2. Fall:  $\alpha_1 = \beta_1, \beta_5 = \beta_3, \beta_2 = \alpha_2$ . Dann gilt  $\alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \beta_5 = \beta_3 = \alpha_5 + \alpha_1 - \pi$  und  $\alpha_2 = \beta_2 = \alpha_4 + \alpha_5 - \pi$ . Daraus erhalten wir für  $\alpha_5$  die Darstellung  $\alpha_5 = \alpha_2 - \alpha_4 + \pi$ . Diese setzen wir nun in die erste Gleichung ein und erhalten  $\alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \alpha_2 - \alpha_4 + \pi + \alpha_1 - \pi$ .

Damit ergibt sich die Beziehung  $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \pi = \alpha_1 + \alpha_2$ . Nun gilt für die Summe der Innenwinkel in einem Fünfeck  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3\pi$ . Daraus erhalten wir  $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3\pi - \alpha_5 - \alpha_1$ . Indem wir das in die Gleichung einsetzen, erhalten wir  $3\pi - \alpha_5 - \alpha_1 - \pi = \alpha_1 + \alpha_2$  und damit  $2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_1$ . Da wir jedoch vorausgesetzt haben, dass die Winkelsumme zweier benachbarter Winkel stets größer als  $\pi$  sein soll, gilt  $\alpha_1 + \alpha_2 > \pi$  und  $\alpha_5 + \alpha_1 > \pi$  und wir erhalten einen Widerspruch.

3. Fall:  $\alpha_1 = \beta_3, \beta_5 = \alpha_2, \beta_2 = \beta_1$ . Dann gilt  $\alpha_1 = \beta_3 = \alpha_5 + \alpha_1 - \pi$ . Damit wäre  $\alpha_5 = \pi$  und wir erhalten einen Widerspruch.

4. Fall:  $\alpha_1 = \beta_3, \beta_5 = \beta_1, \beta_2 = \alpha_2$ . Ebenso wie im 3. Fall gilt dann  $\alpha_1 = \beta_3 = \alpha_5 + \alpha_1 - \pi$  und wir erhalten den Widerspruch  $\alpha_5 = \pi$ . Somit können  $D_1$  und  $D_2$  nicht ähnlich sein.

Ebenso zeigen wir, dass  $D_1$  und  $D_3$  nicht zueinander ähnlich sind. Wir nehmen also an, dass  $D_1$  und  $D_3$  ähnlich sind. Da die Größe von  $\alpha_1$  verschieden ist von der Größe aller anderen Winkel, gilt  $\alpha_1 \neq \alpha_3$ . Damit bleiben noch vier Möglichkeiten, welche Winkelgrößen übereinstimmen. Diese sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

- |          |                       |                       |                      |
|----------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| 1. Fall: | $\alpha_1 = \beta_2,$ | $\beta_5 = \alpha_2,$ | $\beta_2 = \beta_4$  |
| 2. Fall: | $\alpha_1 = \beta_2,$ | $\beta_5 = \beta_4,$  | $\beta_2 = \alpha_2$ |
| 3. Fall: | $\alpha_1 = \beta_4,$ | $\beta_5 = \alpha_2,$ | $\beta_2 = \beta_2$  |
| 4. Fall: | $\alpha_1 = \beta_4,$ | $\beta_5 = \beta_2,$  | $\beta_2 = \alpha_2$ |

Im 1. Fall, ebenso wie im 3. und 4. Fall gilt  $\alpha_2(= \beta_2) = \beta_5 = \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$ . Damit wäre  $\alpha_3 = \pi$  und wir erhalten einen Widerspruch. Im 2. Fall ist dann  $\alpha_1 = \beta_2 = \alpha_2$ . Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Demnach sind  $D_1$  und  $D_3$  nicht zueinander ähnlich. Ebenso zeigt man, dass  $D_1$  nicht ähnlich zu  $D_4$  oder  $D_5$  sein kann.

Wie im Beweis von Satz 3.21 (1. Fall) gezeigt wurde, hat jede Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden die Gestalt  $P = \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3 \oplus \lambda_4 D_4 \oplus \lambda_5 D_5$  mit gewissen Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \in [0, 1]$ . Einerseits können wir nun  $\lambda_1 = 1$  setzen. Damit erhalten wir die Zerlegung  $P = D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3 \oplus \lambda_4 D_4 \oplus \lambda_5 D_5$  für gewisse Koeffizienten  $\lambda_2, \dots, \lambda_5 \in [0, 1]$ . Andererseits finden wir aber eine Zerlegung  $P = \mu_1 D_1 \oplus \mu_2 D_2 \oplus \mu_3 D_3 \oplus \mu_4 D_4 \oplus \mu_5 D_5$  mit gewissen Koeffizienten  $\mu_1, \dots, \mu_5 \in [0, 1]$ , wobei  $\mu_1 < 1$  ist. Dies lässt sich zum Beispiel erreichen, indem  $\mu_3 > 0$  und  $\mu_4 > 0$  gewählt werden. Da  $D_1$  nur Seiten in Richtung  $n_1, n_3$  und  $n_4$  besitzt und  $D_3$  und  $D_4$  ebenfalls Seiten in diesen Richtungen besitzen, muss  $\mu_1 < 1$  gelten. Da  $D_1$  nicht zu den anderen Dreiecken ähnlich ist, liegt  $P$  ebenfalls in mindestens zwei Zerlegungsklassen.

**2. Fall:** Die Winkelsumme benachbarter Winkel sei wiederum stets größer als  $\pi$ . Allerdings gibt es nun keinen Winkel, dessen Größe nur einmal vorkommt. Da wir den Fall, dass alle Winkel dieselbe Größe besitzen, ausgeschlossen haben, kommt eine Winkelgröße bei genau zwei Winkeln vor und eine andere Winkelgröße kommt bei genau drei Winkeln vor. Dabei sind wiederum zwei Konstellationen denkbar. Entweder liegen die beiden Winkel gleicher Größe direkt nebeneinander oder nicht. Betrachten wir zunächst die erste Konstellation. O. B. d. A. sei  $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$ .

Setzt man nun für die Winkelgrößen  $\xi = \alpha_1 = \alpha_2$  und  $\eta = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$ , so haben die unzerlegbaren Summanden  $D_1, \dots, D_5$  die folgenden Winkelgrößen:

Dreieck	Normalenrichtungen	Winkelgrößen
$D_1$	$n_1, n_3, n_4$	$\xi, \quad \xi + \eta - \pi, \quad 2 \cdot \eta - \pi$
$D_2$	$n_2, n_4, n_5$	$\xi, \quad 2 \cdot \eta - \pi, \quad \eta + \xi - \pi$
$D_3$	$n_3, n_5, n_1$	$\eta, \quad 2 \cdot \eta - \pi, \quad 2 \cdot \xi - \pi$
$D_4$	$n_4, n_1, n_2$	$\eta, \quad \eta + \xi - \pi, \quad \xi + \eta - \pi$
$D_5$	$n_5, n_2, n_3$	$\eta, \quad 2 \cdot \xi - \pi, \quad 2 \cdot \eta - \pi$

Da  $\xi \neq \eta$  ist, kann man der Tabelle leicht entnehmen, dass das Dreieck  $D_4$  nicht ähnlich zu einem der anderen Dreiecke ist. Wie im ersten Fall zeigt man hier leicht, dass  $P$  dann in verschiedenen Zerlegungsklassen liegt.

Interessant ist nun der Fall, in dem die beiden Winkel gleicher Größe nicht direkt nebeneinander liegen. O. B. d. A. sei  $\alpha_1 = \alpha_3 \neq \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5$ .

Setzt man nun für die Winkelgrößen  $\xi = \alpha_1 = \alpha_3$  und  $\eta = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5$ , so haben die unzerlegbaren Summanden  $D_1, \dots, D_5$  die folgenden Winkelgrößen:

Dreieck	Normalenrichtungen	Winkelgrößen
$D_1$	$n_1, n_3, n_4$	$\xi, \quad \eta + \xi - \pi, \quad 2 \cdot \eta - \pi$
$D_2$	$n_2, n_4, n_5$	$\eta, \quad \xi + \eta - \pi, \quad \eta + \xi - \pi$
$D_3$	$n_3, n_5, n_1$	$\xi, \quad 2 \cdot \eta - \pi, \quad \xi + \eta - \pi$
$D_4$	$n_4, n_1, n_2$	$\eta, \quad \eta + \xi - \pi, \quad \eta + \xi - \pi$
$D_5$	$n_5, n_2, n_3$	$\eta, \quad \xi + \eta - \pi, \quad \xi + \eta - \pi$

Hier stellt man fest, dass jeweils zwei bzw. drei Dreiecke zueinander ähnlich sind. Es gilt  $D_1 \simeq D_3 \not\simeq D_2 \simeq D_4 \simeq D_5$ , wobei  $D_2, D_4$  und  $D_5$  gleichschenklige Dreiecke sind. Jede Zerlegungsklasse  $\overline{\mathfrak{T}} \in \zeta(P)$  hat dann die Gestalt  $\overline{\mathfrak{T}} = \{\varphi D_1, \psi D_2\}$  mit gewissen Koeffizienten  $\varphi \geq 0$  und  $\psi > 0$ . Wie im ersten Fall kann man hier leicht zwei verschiedene Zerlegungen von  $P$  angeben.

Einerseits können wir zunächst  $\lambda_2 = 1$  setzen und erhalten die Zerlegung  $P = \lambda_1 D_1 \oplus D_2 \oplus \lambda_3 D_3 \oplus \lambda_4 D_4 \oplus \lambda_5 D_5$  für gewisse Koeffizienten  $\lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_5 \in [0, 1]$ . Andererseits finden wir genauso eine Zerlegung  $P = \mu_1 D_1 \oplus \mu_2 D_2 \oplus \mu_3 D_3 \oplus \mu_4 D_4 \oplus \mu_5 D_5$  mit gewissen Koeffizienten  $\mu_1, \dots, \mu_5 \in [0, 1]$ , wobei  $\mu_2 < 1$  ist. Da jedoch  $D_2$  ähnlich zu  $D_4$  und  $D_5$  ist, können wir hier nicht direkt schließen, dass diese beiden Zerlegungen auch zu verschiedenen Zerlegungsklassen führen.

Dazu nehmen wir an, dass  $P$  nur in einer Zerlegungsklasse liegt. Dann ist  $\psi > 0$  durch  $P$  eindeutig bestimmt. Für  $\psi D_2$  erhalten wir nun die Darstellung  $\psi D_2 = \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_4 \beta_4(D_4) \oplus \lambda_5 \beta_5(D_5)$ , wobei  $\beta_4$  und  $\beta_5$  gewisse geeignete Bewegungen sind. Für die gleichschenkligen Dreiecke  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bezeichnen wir nun jeweils mit  $p_i$  die Länge eines Schenkels und mit  $q_i$  die Länge der Basis. Dann erhalten wir aus der obigen Darstellung von  $\psi D_2$  die Beziehung  $\psi p_2 = \lambda_2 p_2 + \lambda_4 p_4 + \lambda_5 p_5$ . Aus der Zerlegung  $P = \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3 \oplus \lambda_4 D_4 \oplus \lambda_5 D_5$  erhalten wir mit Hilfe von Lemma 2.2 (iii) auch eine entsprechende Zerlegung der Seiten in Richtung  $n_4$ :

$$F_P(n_4) = F_{\lambda_1 D_1}(n_4) \oplus F_{\lambda_2 D_2}(n_4) \oplus F_{\lambda_3 D_3}(n_4) \oplus F_{\lambda_4 D_4}(n_4) \oplus F_{\lambda_5 D_5}(n_4).$$



Da  $D_1$  und  $D_3$  keine Kanten in Richtung  $n_4$  besitzen, ist  $F_P(n_4)$  translationsgleich zu  $F_{\lambda_2 D_2}(n_4) \oplus F_{\lambda_4 D_4}(n_4) \oplus F_{\lambda_5 D_5}(n_4)$ . Da für das Dreieck  $D_2$  die Seite in Richtung  $n_4$  die Basis, aber für  $D_4$  und  $D_5$  jeweils ein Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks ist, erhalten wir folgende Beziehung für die Länge der Seiten:  $a_4 = \lambda_2 q_2 + \lambda_4 p_4 + \lambda_5 p_5$ . Ziehen wir die Gleichung von der obigen ab, so erhalten wir  $\psi p_2 - a_4 = \lambda_2 p_2 - \lambda_2 q_2$ . Da  $D_2$  ein gleichschenkliges, aber nicht gleichseitiges Dreieck ist, ist  $p_2 \neq q_2$ . Deshalb können wir die Gleichung zu  $\lambda_2 = \frac{\psi p_2 - a_4}{p_2 - q_2} (= 1)$  umformen. Die selben Überlegungen können wir mit der anderen Zerlegung  $P = \mu_1 D_1 \oplus \mu_2 D_2 \oplus \mu_3 D_3 \oplus \mu_4 D_4 \oplus \mu_5 D_5$  anstellen. Dann erhalten wir  $\mu_2 = \frac{\psi p_2 - a_4}{p_2 - q_2}$ . Demzufolge gilt  $\lambda_2 = \mu_2$ , was im Widerspruch zu  $\lambda_2 = 1 > \mu_2$  steht. Damit ist die Annahme falsch, dass  $P$  nur in einer Zerlegungsklasse liegt.

**3. Fall:** Es gibt genau ein Paar benachbarter Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ . Für alle anderen Paare benachbarter Winkel gelte  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 2, \dots, 5$ ).

Die Seiten  $a_2$  und  $a_5$  liegen damit parallel zueinander. O. B. d. A. gelte dabei  $a_2 \leq a_5$ . Ein solches Fünfeck ist auf Seite 84 in Abbildung 14 dargestellt. Wir haben im Beweis von Satz 3.21 (2. Fall) gesehen, dass es dann genau vier maximale unzerlegbare Summanden gibt. Diese sind in der folgenden Tabelle angegeben:

maximaler Summand	zugehörige Normalenrichtungen
$S$	$n_2, n_5$
$D_1$	$n_1, n_2, n_4$
$D_2$	$n_1, n_3, n_4$
$D_3$	$n_1, n_3, n_5$

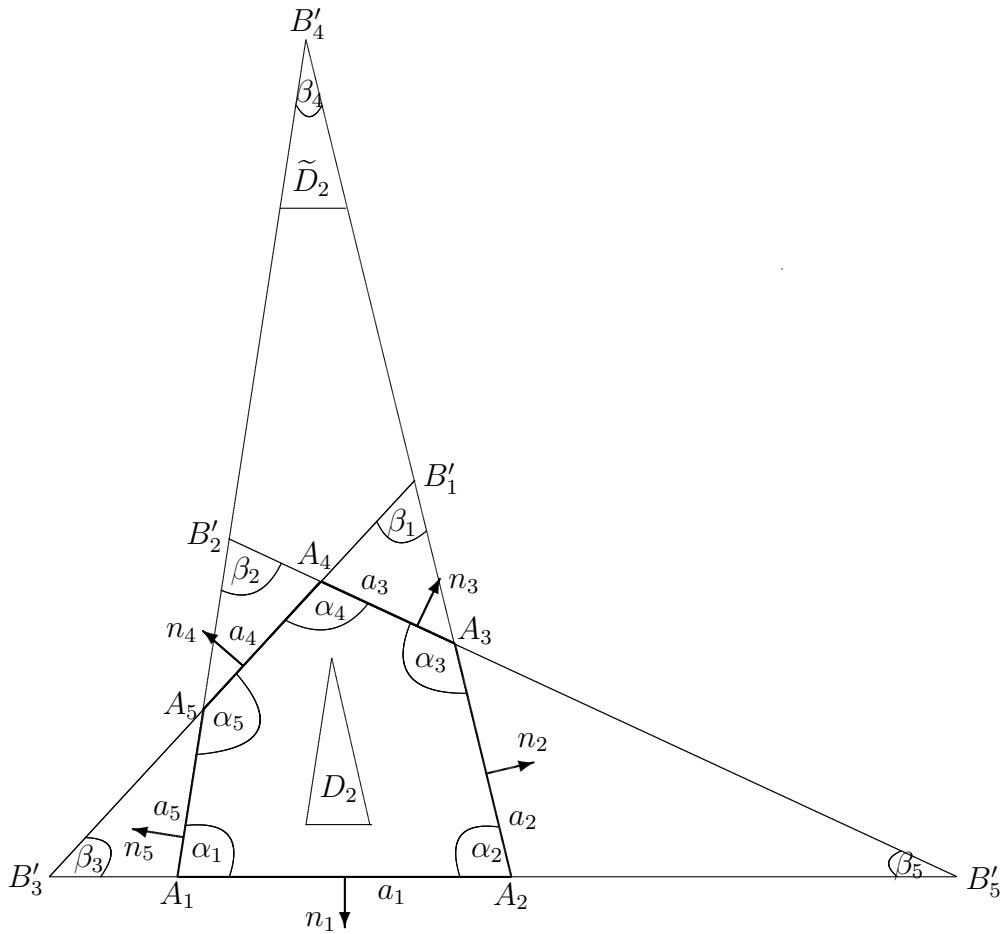
Jede Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden hat dann die Gestalt  $P = \lambda_0 S \oplus \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3$  für gewisse Koeffizienten  $\lambda_0, \dots, \lambda_3 \in [0, 1]$ . Wählen wir nun  $\lambda_0 = 1$ , so ist  $\lambda_1 = 0$ , da  $D_1$  ebenfalls eine Kante in Richtung  $n_2$  besitzt. Dann hat die Zerlegung die Gestalt  $P = S \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3$  für gewisse Koeffizienten  $\lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ .

Andererseits können wir aber auch  $\lambda_1 = 1$  setzen. Dann ist  $\lambda_0 < 1$  und wir erhalten (indem wir die Koeffizienten mit  $\mu_0, \dots, \mu_3$  bezeichnen) eine Darstellung  $P = \mu_0 S \oplus D_1 \oplus \mu_2 D_2 \oplus \mu_3 D_3$  für gewisse Koeffizienten  $\mu_2, \mu_3 \in [0, 1]$  und  $\mu_0 < 1$ . Da die beiden Strecken  $S$  und  $\mu_0 S$  verschiedene Längen haben, liegt  $P$  in unterschiedlichen Zerlegungsklassen.

**4. Fall:** Es gibt genau ein Paar benachbarter Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$ . Für alle anderen Paare benachbarter Winkel gelte  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 2, \dots, 5$ ).

Ein solches Fünfeck ist in Abbildung 20 dargestellt. Dann haben wir im Beweis von Satz 3.21 (3. Fall) gesehen, dass es genau vier maximale unzerlegbare Summanden gibt. Diese sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Dreieck	Normalenrichtungen	Winkel
$D_1$	$n_1, n_2, n_4$	$\beta_3, \alpha_2, \beta_1$
$D_2$	$n_1, n_2, n_5$	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_4$
$D_3$	$n_1, n_3, n_4$	$\beta_3, \beta_5, \alpha_4$
$D_4$	$n_1, n_3, n_5$	$\alpha_1, \beta_5, \beta_2$



**Abbildung 20:** Fünfeck mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  und  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 2, \dots, 5$ )

Wie im 1. Fall wurden dabei die Winkel der Dreiecke bestimmt. Dabei gelten zwischen den Winkelgrößen folgende Beziehungen:

$$\beta_1 = \alpha_3 + \alpha_4 - \pi$$

$$\beta_2 = \alpha_4 + \alpha_5 - \pi$$

$$\beta_3 = \alpha_5 + \alpha_1 - \pi$$

$$\beta_4 = \pi - \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\beta_5 = \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Allerdings müssen wir hier weitere Fälle unterscheiden:

**Fall 4.1:** Es gilt  $\alpha_1 \neq \alpha_4$  und  $\alpha_2 \neq \alpha_5$ .

In diesem Fall ist das Dreieck  $D_3$  nicht ähnlich zu den drei anderen Dreiecken  $D_1$ ,  $D_2$  und  $D_4$ . Dazu nehmen wir zunächst an, dass  $D_3$  ähnlich zu  $D_1$  ist. Da in beiden Dreiecken ein Winkel der Größe  $\beta_3$  vorkommt, müssen die anderen beiden Winkelgrößen paarweise übereinstimmen. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. Dabei ist der Fall  $\beta_5 = \beta_1$  und

$\alpha_4 = \alpha_2$  ausgeschlossen, sodass  $\beta_5 = \alpha_2$  und  $\alpha_4 = \beta_1$  gilt. Setzen wir für  $\beta_5$  die oben gefundene Beziehung ein, so erhalten wir  $\alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \alpha_2$ . Daraus erhalten wir den Widerspruch  $\alpha_3 = \pi$ . Folglich gilt  $D_3 \not\sim D_1$ .

Jetzt nehmen wir an,  $D_3$  sei ähnlich zu  $D_2$ . Schließen wir wieder die beiden Möglichkeiten  $\alpha_4 = \alpha_1$  und  $\alpha_4 = \alpha_2$  aus, so bleiben noch zwei Fälle übrig. Ist  $\alpha_1 = \beta_3$ , so erhalten wir die Beziehung  $\alpha_1 = \alpha_5 + \alpha_1 - \pi$ . Daraus erhalten wir den Widerspruch  $\alpha_5 = \pi$ . Damit gilt für die Winkelgrößen der beiden Dreiecke  $\beta_3 = \alpha_2$ ,  $\beta_5 = \alpha_1$  und  $\alpha_4 = \beta_4$ . Aus den ersten beiden Beziehungen erhalten wir  $\alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \alpha_1$  und  $\alpha_5 + \alpha_1 - \pi = \alpha_2$ . Fassen wir die beiden Gleichungen zusammen, so erhalten wir  $\alpha_5 + \alpha_1 + \alpha_3 - 2\pi = \alpha_1$ , woraus sich der Widerspruch  $\alpha_3 + \alpha_5 = 2\pi$  ergibt. Demnach gilt  $D_3 \not\sim D_2$ . Ebenso wie  $D_3 \not\sim D_1$  zeigt man dann  $D_3 \not\sim D_4$ .

Wie im Beweis von Satz 3.21 (3. Fall) gezeigt wurde, hat jede Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden die Gestalt  $P = \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus \lambda_3 D_3 \oplus \lambda_4 D_4$  mit gewissen Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in [0, 1]$ . Einerseits können wir nun  $\lambda_3 = 1$  setzen. Damit erhalten wir die Zerlegung  $P = \lambda_1 D_1 \oplus \lambda_2 D_2 \oplus D_3 \oplus \lambda_4 D_4$  für gewisse Koeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4 \in [0, 1]$ . Andererseits finden wir ebenfalls eine Zerlegung  $P = \mu_1 D_1 \oplus \mu_2 D_2 \oplus \mu_3 D_3 \oplus \mu_4 D_4$  mit gewissen Koeffizienten  $\mu_1, \dots, \mu_4 \in [0, 1]$ , wobei  $\mu_3 < 1$  ist. Dies lässt sich zum Beispiel erreichen, indem  $\mu_1 > 0$  und  $\mu_4 > 0$  gewählt werden. Da  $D_3$  nur Seiten in Richtung  $n_1, n_3$  und  $n_4$  besitzt und  $D_1$  und  $D_4$  ebenfalls Seiten in diesen Richtungen besitzen, muss  $\mu_1 < 1$  gelten. Da  $D_3$  nicht zu den anderen Dreiecken ähnlich ist, liegt  $P$  in mindestens zwei Zerlegungsklassen.

**Fall 4.2:** Es gilt  $\alpha_1 = \alpha_4$  und  $\alpha_2 \neq \alpha_4$ .

Dann ist das Dreieck  $D_1$  nicht ähnlich zu den drei anderen Dreiecken  $D_2, D_3$  und  $D_4$ . Dazu nehmen wir zunächst an, dass  $D_1$  ähnlich zu  $D_2$  ist. Da in beiden Dreiecken ein Winkel der Größe  $\alpha_2$  vorkommt, müssen die anderen beiden Winkelgrößen paarweise übereinstimmen. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. Gilt  $\beta_3 = \alpha_1$ , so erhalten wir die Beziehung  $\alpha_5 + \alpha_1 - \pi = \alpha_1$ . Dies führt zu dem Widerspruch  $\alpha_5 = \pi$ . Ist andererseits  $\beta_1 = \alpha_1$ , so erhalten wir  $\alpha_3 + \alpha_4 - \pi = \alpha_1 = \alpha_4$ . Dies führt zu dem Widerspruch  $\alpha_3 = \pi$ . Folglich gilt  $D_1 \not\sim D_2$ .

Jetzt nehmen wir an,  $D_1$  sei ähnlich zu  $D_3$ . Da in beiden Dreiecken ein Winkel der Größe  $\beta_3$  vorkommt, müssen die anderen beiden Winkelgrößen paarweise übereinstimmen. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. Dabei ist der Fall  $\beta_1 = \beta_5$  und  $\alpha_2 = \alpha_4$  ausgeschlossen, sodass  $\alpha_2 = \beta_5$  und  $\beta_1 = \alpha_4$  gilt. Setzen wir für  $\beta_5$  die oben gefundene Beziehung ein, so erhalten wir  $\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$ . Daraus erhalten wir den Widerspruch  $\alpha_3 = \pi$ . Demnach gilt  $D_1 \not\sim D_3$ .

Da die beiden Dreiecke  $D_3$  und  $D_4$  jeweils einen Winkel der Größe  $\beta_5$  besitzen und weiterhin  $\alpha_1 = \alpha_4$  gilt, sind diese beiden Dreiecke ähnlich zueinander. Damit gilt auch  $D_1 \not\sim D_4$ . Ebenso wie im Fall 4.1 zeigt man nun, dass  $P$  in mindestens zwei Zerlegungsklassen liegt.

**Fall 4.3:** Im Fall  $\alpha_1 \neq \alpha_4$  und  $\alpha_2 = \alpha_4$  kann man analog zum Fall 4.2 zeigen, dass das Dreieck  $D_4$  nicht zu den anderen Dreiecken ähnlich ist und demzufolge  $P$  in mindestens zwei Zerlegungsklassen liegt.

**Fall 4.4:** Es gilt  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4$ .

Damit gilt auch  $\beta_1 = \alpha_3 + \alpha_4 - \pi = \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \beta_5$  und  $\beta_2 = \alpha_4 + \alpha_5 - \pi = \alpha_5 + \alpha_1 - \pi = \beta_3$ . Infolge dessen sind die drei Dreiecke  $D_1, D_3$  und  $D_4$  ähnlich zueinander.

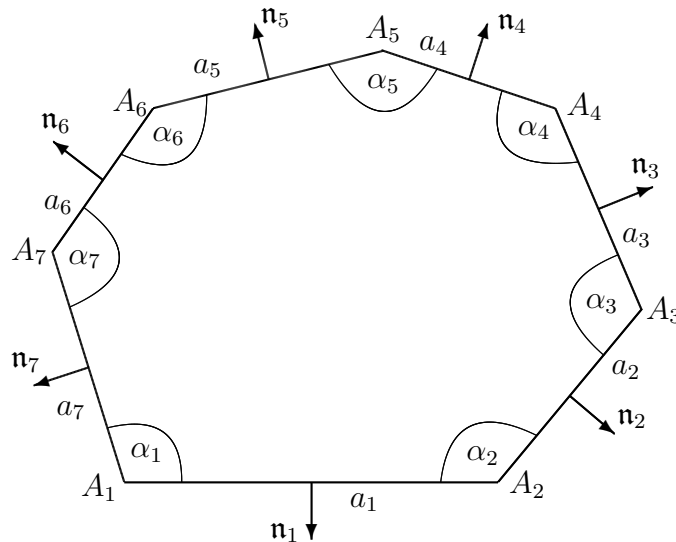
Wir nehmen nun an,  $D_2$  sei ebenfalls ähnlich zu  $D_1$ . Da beide Dreiecke einen Winkel der Größe  $\alpha_2$  gemeinsam haben, gilt  $\alpha_1 = \beta_3$  oder  $\alpha_1 = \beta_1$ . Ist  $\alpha_1 = \beta_3$ , so erhalten wir die Beziehung  $\alpha_1 = \beta_3 = \alpha_5 + \alpha_1 - \pi$ . Daraus erhalten wir den Widerspruch  $\alpha_5 = \pi$ . Ist andererseits  $\alpha_1 = \beta_1$ , so gilt  $\alpha_4 = \alpha_1 = \beta_1 = \alpha_3 + \alpha_4 - \pi$ . Daraus erhalten wir den Widerspruch  $\alpha_3 = \pi$ . Somit gilt  $D_2 \not\sim D_1 \simeq D_3 \simeq D_4$ . Wie im Fall 4.1 zeigt man nun, dass  $P$  in mindestens zwei Zerlegungsklassen liegt.

**5. Fall:** Es gibt drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 \leq \pi$ . In diesem Fall wurde schon in Satz 3.21 gezeigt, dass  $P$  die Minkowskisumme aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ) ist. Damit liegt  $P$  nur in einer Zerlegungsklasse. q.e.d.

### 3.4.4. $n$ -Ecke

Jetzt wollen wir untersuchen, ob und wie sich die Ergebnisse für Fünfecke auf Polygone mit größerer Eckenzahl übertragen lassen. Dabei zeigt sich, dass es eine dem Satz 3.21 entsprechende Charakterisierung der  $n$ -Ecke gibt, die eine eindeutige Zerlegung in unzerlegbare Summanden besitzen.

Für  $n$ -Ecke verwenden wir dabei für die Ecken, Seiten und Winkel ähnliche Bezeichnungen wie bei Fünfecken. Da wir den Buchstaben  $n$  für die Anzahl der Ecken verwenden, benutzen wir das  $\mathbf{n}$  der Frakturschrift, um die Normalenvektoren  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n$  zu bezeichnen. In Abbildung 21 sind die Bezeichnungen am Beispiel eines Siebenecks dargestellt.



**Abbildung 21:** Bezeichnung der Ecken, Seiten und Winkel bei  $n$ -Ecken

**Satz 3.24:** Für ein  $n$ -Eck  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Die Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ , die nicht zueinander homothetisch sind, ist (bis auf die Reihenfolge) eindeutig.
- (2)  $P$  besitzt höchstens  $n - 2$  maximale unzerlegbare Summanden (in  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ).
- (3)  $P$  besitzt genau  $n - 2$  maximale unzerlegbare Summanden (in  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ).
- (4)  $P$  ist Minkowskisumme aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ).
- (5)  $P$  besitzt drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$ , sodass  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 \leq \pi$  gilt.
- (6)  $P$  besitzt zwei Paare benachbarter Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sowie  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sodass  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$  und  $\beta_1 + \beta_2 \leq \pi$  gilt.

BEWEIS: Für Dreiecke und Vierecke sind diese Bedingungen stets erfüllt, wie wir bereits in den Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2 gesehen haben. In Satz 3.21 wurden diese Aussagen schon für Fünfecke bewiesen. Deshalb sei hier  $n \geq 6$  vorausgesetzt.

Wir zeigen zunächst wieder die Äquivalenz von (5) und (6). Da die Aussage (6) stärker ist, genügt es zu zeigen, dass daraus die Aussage (5) folgt. Der Winkel  $\beta_1$  entspricht einem  $\alpha_k$  für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  und der Winkel  $\beta_2$  ist dann gleich  $\alpha_{k+1}$ . Wir nehmen an, die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  und  $\beta_2$  seien paarweise verschieden. Damit gilt  $k \in \{3, \dots, n-1\}$ . Für die Größen der Winkel gilt nach Voraussetzung  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$  und  $\beta_1 + \beta_2 \leq \pi$ . Damit gilt für die Summe der vier Winkel  $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_k + \alpha_{k+1} \leq 2\pi$ . Für die Innenwinkelsumme in einem  $n$ -Eck gilt jedoch  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$ . Daraus erhalten wir dann für die  $n-4$  übrig bleibenden Winkel

$$\sum_{\substack{i=3 \\ i \neq k, k+1}}^n \alpha_i \geq (n-4)\pi.$$

Damit muss mindestens eine dieser vier Winkelgrößen größer oder gleich  $\pi$  sein. Dies kann jedoch nicht sein, da Innenwinkel stets kleiner als  $\pi$  sind. Also müssen zwei der vier Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  übereinstimmen. Damit gibt es drei benachbarte Winkel, mit der geforderten Eigenschaft.

Um die Äquivalenz der anderen Aussagen zu zeigen, unterscheiden wir, abhängig von der Winkelsumme benachbarter Winkel, verschiedene Fälle.

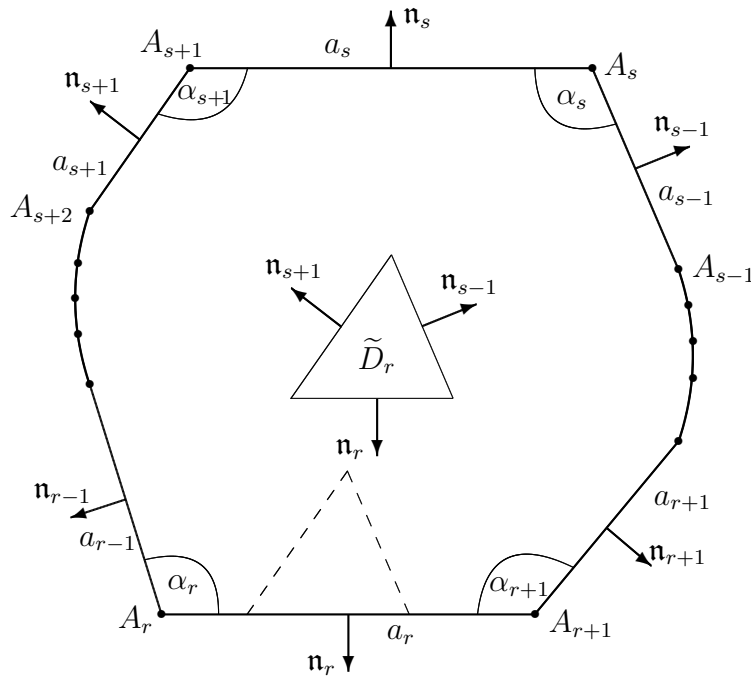
**1. Fall:** Die Winkelsumme zweier benachbarter Winkel ist stets größer als  $\pi$ .

Damit sind die Eigenschaften (5) und (6) nicht erfüllt. Im Gegensatz zu Fünfecken, können bei  $n$ -Ecken mit  $n \geq 6$  durchaus Kanten vorhanden sein, die parallel sind. Das reguläre Sechseck ist ein Beispiel dafür. Wir nehmen an,  $P$  besitze  $k$  Kanten, die keine parallelen Kanten besitzen und  $l$  Paare zueinander paralleler Kanten. Es gilt dann  $n = k + 2 \cdot l$ .

Es sei  $a_p$  eine beliebige Kante von  $P$ , die keine parallele Kante besitzt. Dann besitzt  $P$  eine eindeutig bestimmte Ecke  $A_q$ , die von der Geraden  $\text{aff}(a_p)$  den größten Abstand hat. Mit unseren Bezeichnungen sind  $A_p$  und  $A_{p+1}$  die beiden Eckpunkte von  $a_p$ . Aus den Winkelbedingungen  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  für  $1 = 1, \dots, 5$  folgt  $A_{p+2} \neq A_q$ . Denn sonst wäre  $\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} < \pi$ . Aus demselben Grund ist genauso  $A_{p-1} \neq A_q$ . Deshalb kann die Seite  $a_p$  nicht zu einer der Seiten  $a_{q-1}$  oder  $a_q$  benachbart liegen. Dann sind die Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_{q-1}$  und  $\mathbf{n}_q$  auch Normalenrichtungen eines Dreiecks.  $D_p$  sei nun der maximale Summand von  $P$  mit den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_{q-1}$  und  $\mathbf{n}_q$ , dessen Steinerpunkt im Ursprung liegt.

Auf diese Weise können wir zu jeder Kante von  $P$ , die keine parallele Kante besitzt, einen solchen unzerlegbaren Summanden konstruieren. Diese sind alle verschieden voneinander, da genau zwei der Normalenrichtungen eines jeden solchen Dreiecks zu benachbarten Seiten in  $P$  gehören. Insgesamt gibt es demnach  $k$  solcher maximaler unzerlegbarer Summanden. Ist  $l = 0$ , so haben wir damit bereits  $n = k$  verschiedene maximale unzerlegbare Summanden gefunden.

Sei  $a_r$  nun eine Kante von  $P$ , die eine dazu parallele Kante besitzt. Diese sei  $a_s$ . Mit  $S_r$  bezeichnen wir nun eine Strecke, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und die parallel zu  $a_r$  und  $a_s$  liegt mit der Länge der kleineren der beiden Kanten. Dann ist  $S_r$  offensichtlich ein maximaler Summand von  $P$ . Auf dieselbe Art konstruieren wir auch den maximalen Summanden  $S_s$ . Dabei gilt offenbar  $S_r = S_s$ . Da es genau  $l$  solche Paare paralleler Seiten in  $P$  gibt, erhalten wir auf diese Weise genau  $l$  verschiedene maximale Summanden von  $P$ .



**Abbildung 22:** Polygon mit  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) und einem Paar paralleler Kanten

Außerdem bilden die Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_{s-1}$  und  $\mathbf{n}_{s+1}$  die Normalenrichtungen eines Dreiecks.  $\tilde{D}_r$  sei nun der maximale Summand von  $P$  mit den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_{s-1}$  und  $\mathbf{n}_{s+1}$ , dessen Steinerpunkt im Ursprung liegt (vgl. Abbildung 22). Da von diesen Normalenrichtungen keine zwei zu benachbarten Seiten von  $P$  gehören, sind die so konstruierten Dreiecke  $\tilde{D}_r$  stets verschieden von den oben für Kanten ohne parallele Kanten konstruierte Dreiecke  $D_p$ .

Allerdings kann es passieren, dass die so konstruierten Dreiecke  $\tilde{D}_r$  zusammenfallen. Dies ist zum Beispiel bei einem Sechseck mit drei Paaren paralleler Kanten der Fall. Gibt es jedoch mindestens ein Paar paralleler Seiten  $a_r$  und  $a_s$ , so gibt es auch mindestens die beiden maximalen unzerlegbaren Summanden  $\tilde{D}_r$  und  $\tilde{D}_s$ . Diese sind stets verschieden voneinander, da ein Dreieck nicht die beiden Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_r$  und  $\mathbf{n}_s = -\mathbf{n}_r$  besitzen kann.

Damit haben wir bereits  $k + l + 2$  verschiedene maximale unzerlegbare Summanden gefunden. Für  $l = 1$  sind das  $n + 1$  Summanden, für  $l = 2$  sind das  $n$  Summanden und für  $l = 3$  sind das  $n - 1$  Summanden. Ist  $P$  ein Sechseck mit drei Paaren paralleler Kanten, so gibt es nur diese fünf maximalen unzerlegbaren Summanden (drei Strecken und zwei Dreiecke).

Sei nun  $l \geq 4$ . Wir fixieren wieder ein Paar paralleler Kanten  $a_r$  und  $a_s$ . Da es drei weitere Paare paralleler Kanten gibt, gibt es weiterhin mindestens drei Kanten von  $P$ , die zwischen  $a_r$  und  $a_s$  liegen (in positivem Umlaufsinn). Ebenso gibt es mindestens drei Kanten, die zwischen  $a_s$  und  $a_r$  liegen. Damit liegen zwischen  $a_r$  und  $a_{s-1}$  und zwischen  $a_{s+1}$  und  $a_r$  jeweils mindestens zwei Seiten. Zwischen  $a_{s-1}$  und  $a_{s+1}$  liegt hingegen nur eine Kante von  $P$ . Deshalb sind für zwei verschiedene Kanten  $a_r$  und  $a_t$  (die jeweils parallele Kanten besitzen) die oben konstruierten Dreiecke  $\tilde{D}_r$  und  $\tilde{D}_t$  verschieden voneinander. Somit gibt es mindestens  $2 \cdot l$  weitere maximale unzerlegbare Summanden von  $P$ . Insgesamt haben wir demzufolge mindestens  $k + 3 \cdot l = n + l$  maximale unzerlegbare Summanden von  $P$ . Damit sind die Aussagen (2) und (3) nicht erfüllt.

Wir müssen nun noch die Aussagen (1) und (4) widerlegen. Dazu nehmen wir nun an,  $P$  besitze ein Paar zueinander paralleler Kanten  $a_r$  und  $a_s$ . Falls die beiden Kanten unterschiedliche Längen haben, sei o. B. d. A.  $a_r$  die kürzere der beiden Seiten. Oben haben wir bereits die beiden maximalen unzerlegbaren Summanden  $S_r$  und  $\tilde{D}_r$  gefunden, die beide Kanten in der Normalenrichtung  $\mathbf{n}_r$  besitzen. Da  $a_r$  höchstens so lang wie  $a_s$  ist, besitzen  $a_r$  und  $S_r$  dieselbe Länge.

Wir nehmen nun an,  $P$  wäre die Summe aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden. Dann ist insbesondere  $S_r \oplus \tilde{D}_r$  ein Summand von  $P$ . Folglich besitzt  $P$  eine Darstellung  $P = S_r \oplus \tilde{D}_r \oplus P'$ . Für die Seiten in Richtung  $\mathbf{n}_r$  gilt dann

$$F_P(\mathbf{n}_r) = F_{S_r}(\mathbf{n}_r) \oplus F_{\tilde{D}_r}(\mathbf{n}_r) \oplus F_{P'}(\mathbf{n}_r).$$

Nun haben jedoch  $F_P(\mathbf{n}_r) = a_r$  und  $F_{S_r}(\mathbf{n}_r) = S_r$  dieselbe Länge. Außerdem besitzt auch  $\tilde{D}_r$  eine Kante in Richtung  $\mathbf{n}_r$ . Deshalb besitzt  $F_{\tilde{D}_r}(\mathbf{n}_r)$  eine positive Länge und wir erhalten einen Widerspruch. Demnach ist  $P$  nicht die Summe aller seiner maximalen

Summanden und die Darstellung von  $P$  als Minkowskisumme unzerlegbarer Summanden ist damit nicht eindeutig.

Wir nehmen nun an,  $P$  besitze kein Paar paralleler Seiten.  $D$  sei ein beliebiger maximaler unzerlegbarer Summand mit Kanten in den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_r$  und  $\mathbf{n}_s$ . Mindestens eine der drei Seiten von  $D$  besitzt dabei die selbe Länge, wie die entsprechende Seite von  $P$ . O.B.d.A. besitze  $F_D(\mathbf{n}_p)$  die gleiche Länge wie  $a_p$ . Ist nun das Dreieck  $D$  verschieden von dem oben konstruierten Dreieck  $D_p$ , so haben wir wiederum zwei verschiedene maximale unzerlegbare Summanden gefunden, die Kanten in Richtung  $\mathbf{n}_p$  besitzen.

Wir nehmen nun wieder an,  $P$  wäre die Summe aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden. Dann ist insbesondere  $D \oplus D_p$  ein Summand von  $P$ . Somit hat  $P$  eine Darstellung  $P = D \oplus D_p \oplus P'$ . Für die Seiten in Richtung  $\mathbf{n}_p$  gilt dann

$$F_P(\mathbf{n}_p) = F_D(\mathbf{n}_p) \oplus F_{D_p}(\mathbf{n}_p) \oplus F_{P'}(\mathbf{n}_p).$$

Nun haben jedoch  $F_P(\mathbf{n}_p) = a_p$  und  $F_D(\mathbf{n}_p)$  dieselbe Länge. Außerdem besitzt auch  $D_p$  eine Kante in Richtung  $\mathbf{n}_p$ . Deshalb besitzt  $F_{D_p}(\mathbf{n}_p)$  eine positive Länge und wir erhalten einen Widerspruch. Infolge dessen ist  $P$  nicht die Summe aller seiner maximalen Summanden und die Darstellung von  $P$  als Minkowskisumme unzerlegbarer Summanden ist damit nicht eindeutig.

Es sei nun  $D = D_p$ .  $A_q$  sei wieder die eindeutig bestimmte Ecke, die von der Geraden  $\text{aff}(a_p)$  den größten Abstand hat. Dann hat  $D_p$  Kanten mit den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_{q-1}$  und  $\mathbf{n}_q$ . Da  $\alpha_q + \alpha_{q+1} > \pi$  ist, bilden auch die drei Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_{q-1}$  und  $\mathbf{n}_{q+1}$  die Normalenrichtungen eines Dreiecks.  $\tilde{D}$  bezeichne nun den maximalen unzerlegbaren Summanden, mit den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_{q-1}$  und  $\mathbf{n}_{q+1}$ , dessen Steinerpunkt im Ursprung liegt. Damit haben wir wiederum zwei verschiedene maximale unzerlegbare Summanden gefunden, die Kanten in Richtung  $\mathbf{n}_p$  besitzen. Wie oben zeigt man nun, dass  $P$  dann nicht die Summe aller seiner maximalen Summanden sein kann und die Darstellung von  $P$  als Minkowskisumme unzerlegbarer Summanden somit nicht eindeutig ist.

**2. Fall:** Es gibt genau ein Paar benachbarter Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ . Für alle anderen Paare benachbarter Winkel gelte  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 2, \dots, n$ ).

Die Eigenschaften (5) und (6) sind damit nicht erfüllt. Die Seiten  $a_2$  und  $a_n$  liegen parallel zueinander.  $S$  sei nun die Strecke deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und die parallel zu  $a_2$  und  $a_n$  liegt mit der Länge der kleineren der beiden Stecken. Dann ist  $S$  offensichtlich ein maximaler Summand von  $P$ . O.B.d.A. besitze  $S$  dieselbe Länge wie  $a_n$ . Wir werden nun erneut zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob  $P$  eine weitere Kante besitzt, die parallel zu  $a_1$  ist.

**Fall 2.1:** Es gibt eine Kante  $a_q$ , die parallel zu  $a_1$  liegt.

Damit gibt es eine weitere Strecke  $\tilde{S}$  als maximalen unzerlegbaren Summanden. Da aus den Winkelbedingungen folgt, dass  $a_q < a_1$  ist, besitzt  $\tilde{S}$  ebenfalls die Länge von



$a_q$ . Außerdem liegt  $\tilde{S}$  wieder parallel zu  $a_q$  und  $a_1$ . Der Mittelpunkt liege wieder im Ursprung.

Da  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  ist, gilt  $q \geq 4$ . Andererseits ist auch  $\alpha_n + \alpha_{n-1} > \pi$ , sodass  $q \leq n - 2$  gilt. Aus den Winkelbedingungen folgt weiterhin, dass jedes Dreieck, dass ein unzerlegbarer Summand von  $P$  ist, eine Kante mit der Normalenrichtung  $\mathbf{n}_1$  besitzen muss. Sind nun  $\mathbf{n}_r$  und  $\mathbf{n}_s$  zwei weitere Normalenrichtungen, so sind diese genau dann die Normalenrichtungen eines Dreiecks, wenn eine der Normalenrichtungen zwischen  $\mathbf{n}_1$  und  $\mathbf{n}_q$  liegt (im positiven Umlaufsinn) und die andere zwischen  $\mathbf{n}_q$  und  $\mathbf{n}_1$  liegt. Es gilt demnach  $2 \leq r \leq q - 1$  und  $q + 1 \leq s \leq n$ . Allerdings darf nicht gleichzeitig  $r = 2$  und  $s = n$  gelten, da  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_n$  ist und somit  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  und  $\mathbf{n}_n$  nicht die Normalenrichtungen eines Dreiecks sind. Mit  $D_{rs}$  bezeichnen wir nun den maximalen unzerlegbaren Summanden mit den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_r$  und  $\mathbf{n}_s$ , dessen Steinerpunkt im Ursprung liegt.

Für  $r$  gibt es dabei  $q - 2$  Möglichkeiten und für  $s$  gibt es  $n - q$  Möglichkeiten. Somit gibt es insgesamt  $(q - 2)(n - q) - 1$  verschiedene solche Dreiecke. Da die minimale Anzahl solcher Dreiecke bei  $q = 4$  und  $q = n - 2$  angenommen wird, gibt es mindestens  $(4 - 2)(n - 4) - 1 = ((n - 2) - 2)(n - (n - 2)) - 1 = 2n - 9$  solche Dreiecke. Da wir  $n \geq 6$  vorausgesetzt haben, existieren demnach wenigstens  $n - 3$  dieser Dreiecke. Zusammen mit den beiden Strecken  $S$  und  $\tilde{S}$  gibt es dementsprechend mindestens  $n - 1$  maximale unzerlegbare Summanden. Damit sind die Aussagen (2) und (3) nicht erfüllt.

Wir müssen nun noch die Aussagen (1) und (4) widerlegen. Die Strecke  $S$  besitzt die beiden Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_n$  und  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_n$ . Wir hatten weiter vorausgesetzt, dass  $S$  die selbe Länge wie  $a_n$  besitzt. Das oben konstruierte Dreieck  $D_{3n}$  besitzt die Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3$  und  $\mathbf{n}_n$ . Beide unzerlegbare Summanden haben dadurch die Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_n$  gemeinsam.

Wir nehmen nun an,  $P$  wäre die Summe aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden. Dann ist insbesondere  $S \oplus D_{3n}$  ein Summand von  $P$ . Deswegen hat  $P$  eine Darstellung  $P = S \oplus D_{3n} \oplus P'$ . Für die Seiten in Richtung  $\mathbf{n}_n$  gilt dann

$$F_P(\mathbf{n}_n) = F_S(\mathbf{n}_n) \oplus F_{D_{3n}}(\mathbf{n}_n) \oplus F_{P'}(\mathbf{n}_n).$$

Nun haben jedoch  $F_P(\mathbf{n}_n) = a_n$  und  $F_S(\mathbf{n}_n) = S$  dieselbe Länge. Außerdem besitzt  $D_{3n}$  eine Kante in Richtung  $\mathbf{n}_n$ . Deshalb besitzt  $F_{D_{3n}}(\mathbf{n}_n)$  eine positive Länge und wir erhalten einen Widerspruch. Folglich ist  $P$  nicht die Summe aller seiner maximalen Summanden und die Darstellung von  $P$  als Minkowskisumme unzerlegbarer Summanden ist damit nicht eindeutig.

**Fall 2.2:** Es gibt keine Kante von  $P$ , die parallel zu  $a_1$  liegt.

Dann besitzt  $P$  eine eindeutig bestimmte Ecke  $A_q$ , die von der Geraden  $\text{aff}(a_1)$  den größten Abstand hat. Aus der Winkelbedingung  $\alpha_2 + \alpha_3 > \pi$  erhalten wir wieder  $q \geq 4$ . Andererseits erhalten wir aus  $\alpha_n + \alpha_{n-1} > \pi$  die Einschränkung  $q \leq n - 1$ . Wie im Fall 2.1 muss jedes Dreieck, dass ein unzerlegbarer Summand von  $P$  ist, eine Kante mit der Normalenrichtung  $\mathbf{n}_1$  besitzen. Sind nun  $\mathbf{n}_r$  und  $\mathbf{n}_s$  zwei weitere Normalenrichtungen, die zu einem Dreieck gehören, so gilt  $2 \leq r \leq q - 1$  und  $q \leq s \leq n$ . Allerdings darf

wiederum nicht gleichzeitig  $r = 2$  und  $s = n$  gelten, da  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_n$  ist und somit  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  und  $\mathbf{n}_n$  nicht die Normalenrichtungen eines Dreiecks sind. Mit  $D_{rs}$  bezeichnen wir wieder den maximalen unzerlegbaren Summanden mit den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_r$  und  $\mathbf{n}_s$ , dessen Steinerpunkt im Ursprung liegt.

Für  $r$  gibt es dabei  $q - 2$  Möglichkeiten und für  $s$  gibt es  $n - q + 1$  Möglichkeiten. Demgemäß gibt es insgesamt  $(q - 2)(n - q + 1) - 1$  verschiedene solche Dreiecke. Da die minimale Anzahl solcher Dreiecke bei  $q = 4$  und  $q = n - 1$  angenommen wird, gibt es mindestens  $(4 - 2)(n - 4 + 1) - 1 = ((n - 1) - 2)(n - (n - 1) + 1) - 1 = 2n - 7$  solche Dreiecke. Da wir  $n \geq 6$  vorausgesetzt haben, existieren demnach wenigstens  $n - 1$  dieser Dreiecke. Zusammen mit der Strecke  $S$  gibt es also mindestens  $n$  maximale unzerlegbare Summanden. Damit sind die Aussagen (2) und (3) ebenfalls nicht erfüllt.

Wie im Fall 2.1 zeigt man nun, dass  $P$  nicht die Summe aller seiner maximalen Summanden ist und die Darstellung von  $P$  als Minkowskisumme unzerlegbarer Summanden damit nicht eindeutig ist.

**3. Fall:** Es gibt genau ein Paar benachbarter Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$ . Für alle anderen Paare benachbarter Winkel gelte  $\alpha_i + \alpha_{i+1} > \pi$  ( $i = 2, \dots, n$ ).

Diesen Fall beweist man analog zum 2. Fall. Da hierbei die Seiten  $a_2$  und  $a_n$  nicht zueinander parallel sind, ist die Strecke  $S$  kein Summand von  $P$ . Dafür existiert jedoch der Summand  $D_{2n}$ , den wir im 2. Fall ausschließen mussten.

**4. Fall:** Es gibt drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ . Die Eigenschaften (5) und (6) sind hier also erfüllt. Die Seiten  $a_1$  und  $a_3$  liegen parallel zueinander.  $S_1$  sei nun die Strecke deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und die parallel zu  $a_1$  und  $a_3$  liegt mit der Länge der kleineren der beiden Strecken. Dies ist offenbar  $a_3$ . Dann ist  $S_1$  offensichtlich ein maximaler Summand von  $P$ . Ebenso liegen die beiden Seiten  $a_2$  und  $a_n$  parallel zueinander.  $S_2$  sei nun die Strecke deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und die parallel zu  $a_2$  und  $a_n$  liegt mit der Länge von  $a_n$ . Dann ist  $S_2$  ein maximaler Summand von  $P$ . Da es weiter keine Paare zueinander paralleler Kanten geben kann, gibt es keine weiteren Strecken, die maximale unzerlegbare Summanden von  $P$  sind.

Wie im Beweis von Satz 3.21 (4. Fall) zeigt man, dass jedes Dreieck, das Summand von  $P$  ist, jeweils eine Seite mit der Normalenrichtung  $\mathbf{n}_1$  und  $\mathbf{n}_2$  besitzt. Aus der Winkelbedingung  $\alpha_i + \alpha_{i+1} \geq \pi$  ( $i = 1, \dots, n$ ) folgt, dass weder  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  noch  $\mathbf{n}_n, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  Normalenrichtungen eines Dreiecks sein können. Deshalb muss die dritte Seite eines Dreiecks, das ein unzerlegbarer Summand von  $P$  ist, einen der Normaleneinheitsvektoren  $\mathbf{n}_4, \dots, \mathbf{n}_{n-1}$  besitzen. Umgekehrt muss zu jeder der Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_4, \dots, \mathbf{n}_{n-1}$  ein solcher maximaler unzerlegbarer Summand existieren, da die beiden anderen Summanden  $S_1$  und  $S_2$  keine Seiten in den Richtungen  $\mathbf{n}_4, \dots, \mathbf{n}_{n-1}$  besitzen.

Mit  $D_i$  ( $i = \mathbf{n}_4, \dots, \mathbf{n}_{n-1}$ ) bezeichnen wir nun den maximalen unzerlegbaren Summanden mit den drei Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  und  $\mathbf{n}_i$ , dessen Steinerpunkt im Ursprung liegt. Das sind insgesamt  $n - 4$  solcher Dreiecke. Dazu kommen noch die beiden Strecken  $S_1$  und  $S_2$ . Weitere maximale unzerlegbare Summanden gibt es nicht. Insgesamt gibt es somit genau  $n - 2$  maximale unzerlegbare Summanden. Demnach sind die beiden Eigenschaften (2) und (3) erfüllt.

Wir müssen nun noch nachweisen, dass  $P$  tatsächlich die Summe aller seiner maximalen unzerlegbaren Summanden (aus  $\mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$ ) ist. Da  $S_1, S_2$  und  $D_4, \dots, D_{n-1}$  die einzigen maximalen unzerlegbaren Summanden sind, hat jede Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden die Gestalt  $P = \lambda_1 S_1 \oplus \lambda_2 S_2 \oplus \lambda_4 D_4 \oplus \dots \oplus \lambda_{n-1} D_{n-1}$  für gewisse Koeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_{n-1} \in [0, 1]$ .

Da  $S_1$  der einzige Summand ist, der eine Seite in Richtung  $\mathbf{n}_3$  besitzt und  $S_1$  die gleiche Länge wie  $a_3$  besitzt, muss  $\lambda_1 = 1$  gelten. Entsprechend ist  $S_2$  der einzige Summand, der eine Seite in Richtung  $\mathbf{n}_5$  besitzt. Da  $S_2$  die gleiche Länge wie  $a_5$  besitzt, muss auch  $\lambda_2 = 1$  gelten. Außerdem ist  $D_i$  (für  $i = \mathbf{n}_4, \dots, \mathbf{n}_{n-1}$ ) der einzige maximale unzerlegbare Summand, der eine Kante mit der Normalenrichtung  $\mathbf{n}_i$  besitzt. Deshalb muss  $\lambda_i = 1$  sein.

Aus diesem Grund haben wir für  $P$  die Darstellung  $P = S_1 \oplus S_2 \oplus D_4 \oplus \dots \oplus D_{n-1}$ . Damit ist die Zerlegung von  $P$  in unzerlegbare Summanden, die nicht zueinander homothetisch sind, (bis auf die Reihenfolge) eindeutig. Die beiden Eigenschaften (4) und (1) sind somit erfüllt.

**5. Fall:** Es gibt drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$ . Diesen Fall beweist man analog zum 4. Fall. Da hierbei die Seiten  $a_1$  und  $a_3$  nicht zueinander parallel sind, ist die Strecke  $S_1$  kein Summand von  $P$ . Dafür existiert jedoch der Summand  $D_3$  mit den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  und  $\mathbf{n}_3$ .

**6. Fall:** Es gibt drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$ . Diesen Fall beweist man ebenfalls analog zum 4. und 5. Fall. Da hierbei weder die Seiten  $a_1$  und  $a_3$  noch die Seiten  $a_2$  und  $a_n$  parallel zueinander liegen, treten hier keine Strecken als Summanden auf. Dafür existieren jedoch die beiden Summanden  $D_3$  mit den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  und  $\mathbf{n}_3$  und  $D_n$  mit den Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  und  $\mathbf{n}_n$ . q.e.d.

Ist eine (und damit jede) der Bedingungen aus Satz 3.24 erfüllt, so lassen sich die Zerlegungen in unzerlegbare Summanden genauer angeben.

**Satz 3.25:** (i) Ein Fünfeck  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  besitzt genau dann drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$ , wenn  $P$  die Darstellung

$$P = \bigoplus_{i=3}^n D_i$$

besitzt. Dabei sind  $D_3, \dots, D_n$  zueinander nicht homothetische Dreiecke, welche einen gemeinsamen Winkel der Größe  $\alpha_2$  besitzen. Diese Winkel liegen zueinander translationsgleich (homothetisch).

(ii) Ein Fünfeck  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  besitzt genau dann drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$  (oder umgekehrt), wenn  $P$  die Darstellung

$$P = S \oplus \bigoplus_{i=4}^n D_i$$

besitzt. Dabei sind  $D_4, \dots, D_n$  zueinander nicht homothetische Dreiecke, welche einen gemeinsamen Winkel der Größe  $\alpha_2$  besitzen. Diese Winkel liegen zueinander translationsgleich (homothetisch). Weiter ist  $S$  eine Strecke, welche zu einem der beiden Schenkel dieses gemeinsamen Winkels parallel liegt.

- (iii) Ein Fünfeck  $P \in \mathfrak{P}_o(\mathbb{E}^2)$  besitzt genau dann drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ , wenn  $P$  die Darstellung

$$P = S_1 \oplus S_2 \oplus \bigoplus_{i=4}^{n-1} D_i.$$

besitzt. Dabei sind  $D_4, \dots, D_{n-1}$  zueinander nicht homothetische Dreiecke, welche einen gemeinsamen Winkel der Größe  $\alpha_2$  besitzen. Diese Winkel liegen zueinander translationsgleich (homothetisch). Weiter sind  $S_1$  und  $S_2$  Strecken, welche zu je einem der beiden Schenkel dieses gemeinsamen Winkels parallel liegen.

BEWEIS: dass diese  $n$ -Ecke jeweils eine solche Darstellung besitzen, geht aus dem Beweis von Satz 3.24 (Fälle 4, 5 und 6) hervor. Es ist somit nur noch zu zeigen, dass die Minkowskisummen dieser Strecken und Dreiecke jeweils  $n$ -Ecke mit den entsprechenden Winkelbedingungen sind.

- (i) Es sei  $P = D_3 \oplus D_4 \oplus \dots \oplus D_n$ , wobei  $D_3, \dots, D_n$  zueinander nicht homothetische Dreiecke sind, welche einen gemeinsamen Winkel besitzen, die translationsgleich (homothetisch) zueinander liegen. Wir müssen nun zeigen, dass  $P$  ein  $n$ -Eck ist und dieses drei benachbarte Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  besitzt, die die Winkelbedingungen  $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$  und  $\alpha_2 + \alpha_3 < \pi$  erfüllen.

Für die Dreiecke  $D_3, \dots, D_n$  führen wir folgende Bezeichnungen ein. Die Ecken von  $D_i$  bezeichnen wir mit  $B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}$  (wie üblich im positiven Umlaufsinn). Den Innenwinkel der Ecke  $B_{ik}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) bezeichnen wir mit  $\beta_{ik}$  und entsprechend für die anderen Ecken. Dabei gilt nach Voraussetzung  $\beta_{i2} = \beta_{j2}$  ( $i, j = 3, \dots, n$ ).

Da alle Dreiecke  $D_3, \dots, D_n$  einen gemeinsamen Winkel besitzen, die translationsgleich zueinander liegen, besitzen alle Dreiecke zwei gemeinsame Normalenrichtungen. Diese bezeichnen wir mit  $\mathbf{n}_1$  und  $\mathbf{n}_2$ . Für jedes Dreieck  $D_i$  ist dabei  $\mathbf{n}_1$  die Normalenrichtung der Seite  $\overline{B_{i1}B_{i2}}$ ,  $\mathbf{n}_2$  die Normalenrichtung von  $\overline{B_{i2}B_{i3}}$ . Die dritte Normalenrichtungen von  $D_i$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{n}_i$ . Da die Dreiecke  $D_3, \dots, D_n$  nach Voraussetzung nicht homothetisch zueinander liegen, sind die Normalenrichtungen  $\mathbf{n}_3, \dots, \mathbf{n}_n$  verschieden voneinander und von  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ . Deshalb besitzt  $P$  genau  $n$  verschiedene Normalenrichtungen und ist damit ein  $n$ -Eck.

Da die Winkel  $\beta_{32}, \dots, \beta_{n2}$  translationsgleich sind, besitzt  $P$  ebenfalls einen Winkel, der translationsgleich zu diesen ist. Diesen Winkel bezeichnen wir mit  $\alpha_2$ . Da die drei Dreiecke jedoch nicht homothetisch zueinander liegen, besitzen die Winkel  $\beta_{31}, \dots, \beta_{n1}$  jeweils verschiedene Größen. O. b. d. A. sei  $\beta_{31} > \beta_{41} > \dots > \beta_{n1}$ . Dann ist auch  $\beta_{33} < \beta_{43} < \dots < \beta_{n3}$ .

Dabei ist der Winkel  $\beta_{31}$  nicht nur vom Betrag her größer als die Winkel  $\beta_{41}, \dots, \beta_{n1}$ , sondern er umfasst die beiden anderen Winkel sogar (eventuell nach einer geeigneten Translation) im Sinne einer mengentheoretischen Inklusion. Deshalb entsteht bei der Bildung der Minkowskisumme dieser drei Winkel wieder ein Winkel der translationsgleich zu  $\beta_{31}$  ist. Deshalb ist  $\alpha_1 = \beta_{31}$ . Damit erhalten wir für die Summe  $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_{31} + \beta_{32} < \pi$  und die erste Bedingung ist erfüllt.

Aus demselben Grund ist  $\alpha_3 = \beta_{n3}$ . Damit gilt  $\alpha_2 + \alpha_3 = \beta_{n2} + \beta_{n3} < \pi$  und auch die zweite Bedingung ist erfüllt.

(ii) und (iii): Die anderen beiden Aussagen kann man analog beweisen. q.e.d.

# 4. Zusammenfassung und offene Probleme

## 4.1. Zusammenfassung der Ergebnisse

In dieser Arbeit konnte nur ein kleiner Einblick in die Theorie der Minkowskischen Zerlegungsgleichheit gegeben werden. Viele interessante Themen mussten ausgelassen werden, um den Umfang der Arbeit nicht zu sprengen. Im Wesentlichen habe ich mich auf die Minkowskische Zerlegungsgleichheit von Polytopen beschränkt. Im Abschnitt 3.1 wurden dazu notwendige Bedingungen untersucht. Neben der mittleren Breite, welche für alle konvexen Mengen definiert ist, wurden dort eine ganze Reihe von Minkowski-additiven Funktionalen eingeführt, die nur für konvexe Polytope definiert sind. Diese können mit Hilfe zweier Konstruktionsverfahren gewonnen werden, die im Abschnitt 3.1.4 entwickelt wurden. Die so gewonnenen Funktionalen umfassen als Spezialfälle die in den Abschnitten 3.1.2 und 3.1.3 untersuchten Dehnschen Funktionalen und bestimmte Hadwigerscher Funktionalen.

Um hinreichende Bedingungen für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit von Polytopen zu finden, wurde zunächst untersucht, welche Zerlegungen von Polytopen überhaupt möglich sind. Insbesondere wurden Kriterien gesucht, wann ein konvexes Polytop ein Summand eines anderen ist. Dazu wurde in Definition 3.11 auf Seite 57 jedem Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  eine Funktion  $\xi_P : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  zugeordnet. Mit Hilfe dieser Funktion ist es möglich, die Summanden eines Polytops zu charakterisieren. Im Satz 3.8 auf Seite 60 stellte sich weiter heraus, dass jedes Polytop durch diese Funktion bis auf Translationen eindeutig bestimmt ist. Offen bleiben musste jedoch die Frage nach der Existenz von Polytopen mit einer gegebenen Funktion  $\chi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Problem 1:** Es sei  $\chi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Unter welchen Bedingungen gibt es ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , sodass  $\chi = \xi_P$  gilt?

In gewisser Weise stellt der Satz 3.8 ein Analogon zu einem Satz von Minkowski dar. Allerdings wurden hier ganz andere Beweistechniken genutzt, die beim Satz von Minkowski nicht angewendet werden können. In der Bemerkung 3.14 auf Seite 61 wurde ausführlicher auf die Beziehung zum Satz von Minkowski eingegangen. Eine Verallgemeinerung von  $\xi_P$  wurde dann in Definition 3.12 eingeführt. Für diese Funktionen  $\psi_P^k : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $k > 1$ ) gelten jedoch keine Analogie zu den Sätzen 3.6 und 3.7, so dass die hier benutzten Beweistechniken für Satz 3.8 ebenfalls nicht angewendet werden können. Somit musste auch das Problem 2 auf Seite 62 offen bleiben:

- Problem 2:** (i) Es sei  $1 < k < d - 1$  und  $P, Q \in \mathfrak{P}_d(\mathbb{E}^d)$  und es gelte  $\psi_P^k(u) = \psi_Q^k(u)$  für alle  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Sind  $P$  und  $Q$  dann translationsgleich?
- (ii) Es sei  $\chi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $k \in \mathbb{N}$  mit  $1 < k < d - 1$ . Unter welchen Bedingungen gibt es ein Polytop  $P \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , sodass  $\chi = \psi_P^k$  gilt?

Es stellte sich heraus, dass die Minkowskische Zerlegungsgleichheit eine nichttransitive Relation ist. Diese Eigenschaft erschwert es sehr, wirksame hinreichende Bedingungen zu finden. Um trotzdem hinreichende Bedingungen für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit von Polytopen zu finden, wurden zwei verschiedene Strategien verfolgt.

Zunächst wurde in Abschnitt 3.2.3 verschiedene Abschwächungen der Zerlegungsgleichheit betrachtet. Für die euklidische Ebene  $\mathbb{E}^2$  konnte in Satz 3.10 auf Seite 64 gezeigt werden, dass für Polygone alle diese in Definition 3.13 eingeführten Zerlegungsrelationen übereinstimmen. Diese können durch die mittlere Breite charakterisiert werden.

Bisher noch ungeklärt ist die Frage, ob sich die Ergebnisse von Satz 3.10 auf höhere Dimensionen übertragen lassen. Die Frage lässt sich in zwei Teilprobleme aufspalten.

- Problem 3:** (i) Gilt die Äquivalenz der fünf Zerlegungsrelationen aus Definition 3.13 genauso für Polytope in höheren Dimensionen ( $d \geq 3$ )?
- (ii) Ist die Gleichheit der mittleren Breite und der weiteren in Abschnitt 3.1.4 gefundenen notwendigen Bedingungen der Gleichheit der Funktionale  $E_{f_1, \dots, f_n}^d$  bzw.  $G_{f_1, \dots, f_n}^{d,k}$  hinreichend für die Mehrfach-Zerlegungsgleichheit (bzw. der anderen Zerlegungsrelationen)?

Offen ist noch die Frage ob sich die entsprechenden Aussagen auf konvexe Mengen übertragen lassen, die keine Polygone sind. Auf jeden Fall kommen weitere notwendige Bedingungen hinzu, da Polygone nur mit Polygonen zerlegungsgleich sein können.

- Problem 4:** (i) Gilt die Äquivalenz der fünf Zerlegungsrelationen aus Definition 3.13 allgemein für konvexe Mengen?
- (ii) Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen für die Mehrfach-Zerlegungsgleichheit nichtpolygonaler konvexer Mengen an.

Ein anderer Weg wurde dann in Abschnitt 3.3 beschritten. Unser eigentliches Interesse galt ja nicht der Mehrfach-Zerlegungsgleichheit oder den anderen in Definition 3.13 eingeführten Zerlegungsrelationen. Deshalb sind wir in Abschnitt 3.3 wieder zu der direkten Minkowskischen Zerlegungsgleichheit zurückgekehrt. Die Idee dabei war, jedes Polytop in unzerlegbare Summanden zu zerlegen. Wir nutzen sozusagen die Menge aller unzerlegbaren Polytope des  $\mathbb{E}^d$  als eine Art Baukastensystem, aus dem wir alle anderen Polytope zusammensetzen können. Allerdings ist diese Zerlegung in unzerlegbare Polytope im allgemeinen nicht eindeutig. Es gibt also verschiedene Mengen von Bausteinen, aus denen man dasselbe Polytop zusammensetzen kann. Das hängt eng damit zusammen, dass die Minkowskische Zerlegungsgleichheit nicht transitiv ist. Lassen sich nun zwei Polytope aus derselben Menge von Bausteinen zusammensetzen, so sind sie

offensichtlich auch zerlegungsgleich. Daraus wurden dann notwendige und hinreichende Bedingungen abgeleitet.

Davon ausgehend wurde daraufhin ein formales Hauptkriterium für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit entwickelt. Dabei habe ich mich an dem Vorgehen in der klassischen Zerlegungstheorie orientiert, wie sie von B. Jessen [Jes] und H. Hadwiger [Ha2] entwickelt wurden. Es stellte sich dabei allerdings heraus, dass durch die fehlende Transitivität der Zerlegungsgleichheit die Notwendigkeit bestand, das Vorgehen abzuwandeln. Deshalb musste zu mehrdeutigen Abbildungen übergegangen werden.

## 4.2. Einbettung in die allgemeine Zerlegungstheorie

Ausgehend von der klassischen Zerlegungstheorie und verschiedener Verallgemeinerungen wurde von E. Hertel in [He1, He2] der Begriff der Zerlegungsstruktur eingeführt, um von einem abstrakten algebraischem Standpunkt aus die Gemeinsamkeiten der verschiedenen Zerlegungstheorien herauszustellen. In verschiedenen Arbeiten [Ja1, Ja2, Ja3] hat dann R. Jaritz die Zerlegungsstrukturen genauer untersucht.

**Definition 4.1:**  $(M, *, \sim)$  heißt *Zerlegungsstruktur* genau dann, wenn gilt

(Z1)  $(M, *)$  ist ein partielles Gruppoid,

(Z2)  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation in  $M$  und

$$(Z3) \bigwedge_{a,b \in M} \bigvee_{b',b'' \in M} \left( b \sim b' \wedge b \sim b'' \wedge a * b' \in M \wedge b'' * a \in M \right).$$

In diesem Sinne ist also auch  $(\mathfrak{P}(\mathbb{E}^d), \oplus, \cong)$  eine Zerlegungsstruktur. Unsere Betrachtungen über die Minkowskische Zerlegungsgleichheit fügen sich somit in die allgemeine Zerlegungstheorie ein. Da die Minkowskisumme für alle Teilmengen des  $\mathbb{E}^d$  definiert ist, ist die Operation  $*$ , etwa im Gegensatz zur klassischen Zerlegungstheorie, nicht nur eine partielle Operation. Damit ist das Axiom (Z3) stets erfüllt, unabhängig von der betrachteten Äquivalenzrelation  $\sim$ .

Im allgemeinen und so auch in unserer speziellen Zerlegungsstruktur  $(\mathfrak{P}(\mathbb{E}^d), \oplus, \cong)$  ist die Äquivalenzrelation  $\sim$  nicht mit der Operation  $*$  verträglich. Deshalb wird sie zu einer geeigneten Zerlegungsgleichheitsrelation verallgemeinert, die mit  $*$  verträglich ist. Diese ist jedoch im allgemeinen nicht mehr transitiv. Dies ist zwar bei der klassischen Zerlegungsgleichheit der Fall, jedoch nicht bei der Minkowskischen Zerlegungsgleichheit. Wir haben hier also den Fall, dass sich die Eigenschaften der Äquivalenzrelation  $\sim$  durch den Übergang zur Zerlegungsgleichheitsrelation  $\stackrel{z}{=}$  verschlechtern.

Bisher wurde dieses Problem stets dadurch gelöst, dass man die Zerlegungsgleichheitsrelation  $\stackrel{z}{=}$  zu einer Mehrfach-Zerlegungsgleichheit  $\stackrel{m}{=}$  analog zu Definition 3.13 abschwächte. Die Mehrfach-Zerlegungsgleichheit  $\stackrel{m}{=}$  konnte dann durch Homomorphismen der Zerlegungsstruktur  $(M, *, \sim)$  in Größensysteme bzw. abelsche Gruppen charakterisiert werden. Dieses Konzept wurde hier im Abschnitt 3.2.3 angewandt. Dort wurde im Satz 3.10 auf Seite 64 die Mehrfach-Zerlegungsgleichheit  $\stackrel{m}{=}$  für konvexe Polygone



durch die mittlere Breite charakterisiert. Dabei kann man die mittlere Breite als Homomorphismus von der Zerlegungsstruktur  $(\mathfrak{P}(\mathbb{E}^2), \oplus, \cong)$  in die abelsche Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  auffassen.

Im Abschnitt 3.3 wurde hingegen ein anderer Weg beschritten, der sich auch für die allgemeine Zerlegungstheorie als fruchtbar erweisen kann. Ist die betrachtete Zerlegungsrelation transitiv, also eine Kongruenzrelation, so kann man, indem man zueinander zerlegungsgleiche Polytope in einer Äquivalenzklasse zusammen fasst, zur Faktorstruktur übergehen. Durch den kanonischen Homomorphismus kann dann die Zerlegungsgleichheitsrelation charakterisiert werden.

Da die Minkowski-Zerlegungsgleichheit nicht transitiv ist, kann man hier die zerlegungsgleichen Polytope nicht in Äquivalenzklassen zusammenfassen. Um trotzdem eine ähnliche Konstruktion durchführen zu können, muss man auf die Forderung verzichten, dass die verschiedenen Zerlegungsklassen disjunkt sind. Der hier gewählte Zugang basiert darauf, dass jedes Polytop in unzerlegbare Summanden zerlegt werden kann. Die unzerlegbaren Polytope stellen somit eine Art Baukastensystem dar, mit deren Hilfe alle anderen Polytope dargestellt werden können. Damit konnten dann (nichtdisjunkte) Zerlegungsklassen konstruiert werden. Nach Satz 3.12 sind zwei konvexe Polytope genau dann Minkowski-zerlegungsgleich, wenn sie in einer gleichen Zerlegungsklasse liegen.

Da die Zerlegungsklassen nicht disjunkt sind, kann es auch keinen kanonischen Homomorphismus von  $\mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$  in die Menge der Zerlegungsklassen  $\mathbb{V}$  geben. Deshalb müssen wir zu mehrdeutigen Abbildungen übergehen. Die Rolle der Homomorphismen übernehmen dabei die in Definition 3.16 auf Seite 72 eingeführten mehrdeutigen bewegungsinvarianten superadditiven Polyederabbildungen.

Inwieweit lassen sich nun diese Ergebnisse verallgemeinern? Die Betrachtungen in diesem Abschnitt hingen wesentlich davon ab, dass sich jedes Polytop in unzerlegbare Summanden zerlegen lässt. Das gilt leider nicht, wenn man zur Familie der konvexen Mengen  $\mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  übergeht. Deshalb lässt sich das hier gewählte Vorgehen nicht direkt übertragen. Allerdings sollte es möglich sein die Zerlegungsklassen auf andere Art zu definieren, sodass sich die Sätze 3.13 und 3.14 entsprechend übertragen lassen. Vielleicht kann man diese Ergebnisse dann auch auf Zerlegungsstrukturen übertragen. Das wäre auf jeden Fall eine eigene Untersuchung wert.

Wir haben hier somit ein interessantes Beispiel einer Zerlegungsstruktur, welches sich von den anderen geometrischen Beispielen in einigen Punkten unterscheidet. Zum einen ist die Operation  $\oplus$  nicht nur partiell definiert, was manche Betrachtungen vereinfacht. Andererseits haben wir gesehen, dass die Minkowski-Zerlegungsgleichheit nicht transitiv ist. Das macht insbesondere die Suche nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit schwierig. Ich hoffe, dass die hier vorgestellten Lösungen einen Beitrag leisten, die allgemeine Theorie der Zerlegungsstrukturen voranzubringen.

### 4.3. Aspekte der Zerlegungsgleichheit

In der Einleitung auf Seite 3 wurde schon auf die verschiedenen Aspekte der Zerlegungsgleichheit von Teilmengen des  $\mathbb{E}^d$  hingewiesen. Die drei Aspekte sind die Art der

Zerlegung, die betrachtete Transformationsgruppe und welche Mengen als Zerlegungsteile zugelassen sind. Mit dem letzten Aspekt hängt eng zusammen, für welche Teilmengen des  $\mathbb{E}^d$  überhaupt die Zerlegungsgleichheit untersucht wird. Meist betrachtet man dabei die selbe Familie von Teilmengen des  $\mathbb{E}^d$ .

Die Art der Zerlegung richtet sich nach der Operation  $*$  in der Zerlegungsstruktur  $(M, *, \sim)$ . Dies kann zum Beispiel die disjunkte Vereinigung oder die elementargeometrische Summe sein. Dann sprechen wir entsprechend von disjunkter bzw. elementarer Zerlegungsgleichheit. In der klassischen Zerlegungstheorie und verschiedenen Verallgemeinerungen davon wird stets die disjunkte oder elementare Zerlegungsgleichheit betrachtet. Deshalb taucht die Frage auf, ob es weitere Beispiele von Zerlegungsstrukturen gibt. In [Ja1] hat R. Jaritz interessante Beispiele von Zerlegungsstrukturen angegeben, die aus dem Matrizenkalkül kommen. Möchte man in der Geometrie bleiben, so bietet es sich an, die Minkowskisumme als Operation zu betrachten. Da ich in der Literatur keine Untersuchungen zur Minkowskischen Zerlegungsgleichheit gefunden habe, habe ich dies zum Gegenstand dieser Arbeit gemacht.

Aussagen über konvexe Mengen, die keine Polytope sind, kommen in dieser Arbeit nur am Rande vor. Im Wesentlichen ist es der Satz 3.1, der lediglich eine notwendige Bedingung für die Zerlegungsgleichheit konvexer Mengen liefert. Allerdings ist diese Bedingung schon für Polytope nicht hinreichend. Deshalb muss es noch weitere notwendige Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit konvexer Mengen geben. Man könnte etwa daran denken, für konvexe Mengen mit glattem Rand, mit Hilfe der Krümmungen bzw. der Krümmungsradien weitere notwendige Bedingungen zu formulieren. Dieser Weg wurde hier jedoch nicht weiter beschritten.

Was ist mit nichtkonvexen Mengen? Das ist sicher eine interessante Fragestellung. Allerdings versagen hier die in dieser Arbeit verwendeten Methoden. Insbesondere stehen die im Abschnitt 3.1 gefundenen Funktionale nicht mehr als notwendige Bedingungen zur Verfügung. Die mittlere Breite etwa ist nur für konvexe Mengen definiert. Die anderen in Abschnitt 3.1 betrachteten Funktionale lassen sich zwar auch auf nichtkonvexe Polytope verallgemeinern. Allerdings sind sie für nichtkonvexe Polytope nicht mehr Minkowski-additiv. Man kann jedoch durch Bildung der konvexen Hülle die Aussagen in Abschnitt 3.1 auf nichtkonvexe Mengen übertragen, denn es gilt:

**Lemma 4.1:** *Für  $A, B \subseteq \mathbb{E}^d$  gilt:*

$$\text{conv}(A \oplus B) = \text{conv}(A) \oplus \text{conv}(B).$$

BEWEIS: Sei  $x \in \text{conv}(A \oplus B)$ . Dann besitzt  $x$  eine Darstellung als  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ , wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit der Bedingung  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  und  $x_1, \dots, x_n \in A \oplus B$  sind. Die  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) besitzen nun jeweils Darstellungen  $x_i = a_i + b_i$  mit  $a_1, \dots, a_n \in A$  und  $b_1, \dots, b_n \in B$ . Wir erhalten damit

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i + b_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i}_{\in \text{conv}(A)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i}_{\in \text{conv}(B)}.$$

Also ist  $x \in \text{conv}(A) \oplus \text{conv}(B)$ .

Sei nun  $x \in \text{conv}(A) \oplus \text{conv}(B)$ . Dann gibt es ein  $a \in \text{conv}(A)$  und ein  $b \in \text{conv}(B)$ , sodass  $x = a + b$  gilt. Für  $a$  gibt es dann eine Darstellung  $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ , wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit der Bedingung  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  und  $a_1, \dots, a_n \in A$  sind. Ebenso gibt es für  $b$  eine Darstellung  $b = \sum_{j=1}^m \mu_j b_j$ , wobei  $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$  mit der Bedingung  $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$  und  $b_1, \dots, b_m \in B$  sind. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^m \mu_j b_j \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sum_{j=1}^m \mu_j \right) a_i + \sum_{j=1}^m \mu_j \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) b_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j a_i + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_j \lambda_i b_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (a_i + b_j). \end{aligned}$$

Da  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j = 1$  und jeweils  $a_i + b_j \in A \oplus B$  gilt, ist  $x \in \text{conv}(A \oplus B)$ . q.e.d.

Eine weitere (triviale) notwendige Bedingung können wir aus der Mächtigkeit von Mengen ableiten. Da die Minkowskisumme endlicher Punktmengen wieder eine endliche Punktmenge ist, können endliche Mengen nur mit endlichen Mengen zerlegungsgleich sein. Ebenso können abzählbare Mengen nur mit abzählbaren und überabzählbare nur mit überabzählbaren Mengen zerlegungsgleich sein. Das alles hilft jedoch nicht weiter, um wirksame notwendige und möglichst auch hinreichende Bedingungen für die Minkowski-Zerlegungsgleichheit nichtkonvexer Mengen zu finden.

Da die nichtkonvexen Mengen des  $\mathbb{E}^d$  so vielfältig sind, liegt es nahe, sich nur auf bestimmte Teilklassen zu beschränken. Interessant ist zum Beispiel die Frage nach der Minkowskischen Zerlegungsgleichheit endlicher Mengen. Dabei sollte vielleicht zunächst erst einmal geklärt werden, welche endlichen Mengen überhaupt zerlegbar sind und welche Zerlegungen dabei möglich sind. Dabei spielen dann auch kombinatorische Fragestellungen eine Rolle. Man könnte etwa nach der Anzahl verschiedener Zerlegungen einer endlichen Punktmenge fragen.

In dieser Arbeit wurde ausschließlich die Minkowskische Zerlegungsgleichheit bzgl. der Gruppe  $\mathcal{B}$  der euklidischen Bewegungen untersucht. Der Gedanke liegt nahe, auch die Zerlegungsgleichheit bzgl. anderer Transformationsgruppen zu untersuchen. Beschränkt man sich etwa auf die eigentlichen Bewegungen, so wird sich an den hier vorgestellten Ergebnissen nicht viel ändern. Lediglich im Abschnitt 3.4.2 über die Einteilung der Vierecke ergeben sich bei den Typen III und IV einige kleinere Änderungen.

Schränkt man die Transformationsgruppe auf Translationen ein, so wird das Ergebnis trivial, denn es gilt:

**Satz 4.1:** *Zwei konvexe Mengen  $A, B \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  sind genau dann Minkowski-zerlegungsgleich bzgl. der Gruppe der Translationen, wenn sie translationsgleich sind.*

BEWEIS: Sind  $A$  und  $B$  translativ zerlegungsgleich, so besitzen  $A$  und  $B$  jeweils Darstellungen

$$A = \bigoplus_{i=1}^n A_i \text{ und } B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$$

mit konvexen Mengen  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{K}(\mathbb{E}^d)$  und es gilt  $A_i \stackrel{\mathcal{T}}{=} B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Demnach gibt es Translationsvektoren  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{E}^d$ , sodass sich  $B_i = A_i + t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) schreiben lässt. Damit erhalten wir

$$B = \bigoplus_{i=1}^n B_i = \bigoplus_{i=1}^n (A_i + t_i) = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^n A_i}_{=A} + \underbrace{\sum_{i=1}^n t_i}_{=:t} = A + t.$$

Folglich sind  $A$  und  $B$  translationsgleich. Die umgekehrte Richtung ist trivial. q.e.d.

Geht man andererseits zu umfassenderen Transformationsgruppen über, wie etwa der Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen, so zeigt sich, dass die in Abschnitt 3.1 betrachteten Funktionale nicht mehr invariant sind. In Satz 3.10 auf Seite 64 haben wir gesehen, dass für die euklidische Ebene  $\mathbb{E}^2$  verschiedene in Definition 3.13 betrachtete Zerlegungsrelationen zusammenfallen und durch die mittlere Breite charakterisiert werden können. Da es für jede konvexe Menge  $K$ , die nicht nur aus einem Punkt besteht, stets eine Ähnlichkeitsabbildung  $\eta \in \mathcal{H}$  gibt, sodass  $b(\eta(K)) = 1$  gilt, erhält man als Folgerung von Satz 3.10 den folgenden Satz. Dabei wird die Definition der Mehrfach-Zerlegungsgleichheit in Definition 3.13 auf Seite 63 sinngemäß modifiziert.

**Satz 4.2:** *Zwei Polygone  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^2)$ , die nicht nur aus einem Punkt bestehen, sind stets mehrfach zerlegungsgleich bzgl. der Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen.*

Entsprechendes gilt ebenso für die anderen Zerlegungsrelationen, wenn man die Definitionen ebenfalls sinngemäß überträgt. Offen bleiben muss vorerst jedoch die Frage, ob eine analoge Aussage auch in höheren Dimensionen gilt.

**Problem 5:** Sind zwei Polytope  $P, Q \in \mathfrak{P}(\mathbb{E}^d)$ , ( $d \geq 3$ ), die nicht nur aus einem Punkt bestehen, stets mehrfach zerlegungsgleich bzgl. der Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen?

# Literaturverzeichnis

- [BH] Böhlm, J.; Hertel, E.: *Polyedergeometrie in  $n$ -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Mathematische Monographien, Bd. 14, Berlin 1980.
- [Bre] Bretschneider, C.A.: *Geometrie und die Geometer vor Euklides*. B. G. Teubner, Leipzig 1870. (Neudruck: Sändig Reprint Verlag, Vaduz, Lichtenstein, 1988.)
- [Euk] Euklid: *Euclidis elementa*. 5 Bde. gr. lat. (Hrsg. J. L. Heiberg), Leipzig 1883-1888; dt. *Die Elemente*. (Übers. C. Thaer), Leipzig 1933, repr. Darmstadt 1962/1971.
- [Gro] de Groot, J.: *Some special metrics in general topology*. Colloq. Math. **6** (1958), 283-286.
- [Grü] Grünbaum, B.: *Convex polytopes*. John Wiley & Sons, London, New York, Sydney 1967.
- [Ha1] Hadwiger, H.: *Ergänzungsgleichheit  $k$ -dimensionaler Polyeder*. Mathematische Zeitschrift, Bd. 55, H. 3 (1952) 292-298.
- [Ha2] Hadwiger, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer, Berlin 1957.
- [He1] Hertel, E.: *Polyederstrukturen*. Math. Nachr. **62** (1974), 57-63.
- [He2] Hertel, E.: *Neuere Ergebnisse und Richtungen der Zerlegungstheorie von Polyedern*. Mitt. Math. Ges. DDR (1977), H.2, 5-22
- [He3] Hertel, E.: *Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit von Mengen in topologischen Räumen*. Wiss. Ztschr. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, Math.-Naturwiss. R., 29.Jg. (1980), H.2
- [HR] Hertel, E.; Richter, C.: *Squaring the circle by dissection*. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik **19/01**, 2001.
- [Ja1] Jaritz, R.: *Kongruenzrelationen in einer Klasse partieller Gruppoide*. Dissertation Friedrich-Schiller-Univ. Jena 1980.

- [Ja2] Jaritz, R.: *Über Kongruenzrelationen in Zerlegungsstrukturen*. Beiträge Algebra Geom. **15** (1983), 7-16.
- [Ja3] Jaritz, R.: *Homomorphismen von Zerlegungsstrukturen in Größensysteme*. Math. Nachr. **134** (1987), 55-71.
- [Jes] Jessen, B.: *Eine Bemerkung über das Volumen von Polyedern*. [dänisch] Mat. Tidsskr. B, Kopenhagen, (1941), 59-65.
- [Lac] Laczkovich, M.: *Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem*. J. Reine Angew. Math. **404** (1990), 77-117.
- [Lei] Leichtweiß, K.: *Konvexe Mengen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 81, Berlin 1980.
- [Mai] Mainzer, K.: *Geschichte der Geometrie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1980.
- [McM] McMullen, P.: *Valuations and dissections*. In: Gruber, P. M.; Wills, J. M. (Hrsg.): *Handbook of convex geometry*. Volume B, 933-988. North-Holland, Amsterdam 1993.
- [MS] McMullen, P.; Schneider, R.: *Valuations on convex bodies*. In: Gruber, P. M.; Wills, J. M. (Hrsg.): *Convexity and Its Applications*. 170-247. Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, Stuttgart 1983.
- [Men] Menger, K.: *Untersuchungen über allgemeine Metrik, I,II,III*. Math. Ann. 100 (1928), 75-163.
- [Min] Minkowski, H.: *Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1897. (Wiederabgedruckt in: Minkowski, H.: *Gesammelte Abhandlungen*. Bd. II, Leipzig 1921.)
- [Sch] Schneider, R.: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski-Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1993.
- [SS] Scriba, C. J.; Schreiber, P.: *5000 Jahre Geometrie.*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 2005.
- [Tar] Tarski, A.: *Problème 38*. Fund. Math. **7** (1925), 381.

# Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, 14.02.2007

(Heiko Mund)